

第 14 章 章末問題の解答

問 14.1 : 計算練習問題

関数 $y = x_1^2 x_2^3$ のグラフの点 $(x_1, x_2) = (4, 1)$ における等高線の傾きを求めよ。

解) 関数の名前を f とする。等高線の傾きは p.277 の公式にあるように偏微分係数の比にマイナスの符号を付けたもの

$$-\frac{\partial f(4,1)/\partial x_1}{\partial f(4,1)/\partial x_2}$$

になる。 x_1 に関する偏微分係数は、

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1^{2-1} \cdot x_2^3 = 2x_1 \cdot x_2^3 \quad \text{より、} \quad \frac{\partial f(4,1)}{\partial x_1} = 2 \times 4 \times 1^3 = 8$$

同様に x_2 に関する偏微分係数は、

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 3x_1^2 \cdot x_2^{3-1} = 3x_1^2 \cdot x_2^2 \quad \text{より、} \quad \frac{\partial f(4,1)}{\partial x_2} = 3 \times 4^2 \times 1^2 = 48$$

よって等高線の傾きは $-8/48 = -1/6$ である。

問 14.2 : 計算練習問題

関数 $y = (x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^2$ のグラフの点 $(x_1, x_2) = (4, 1)$ における等高線の傾きを求めよ。

解) 関数の名前を g とする。問 14.1 と同様に偏微分係数の比にマイナスの符号を付けたものを求めればよい。

x_1 に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{x_1^{1/2} + x_2^{1/2}}{x_1^{1/2}} \quad \text{より、} \quad \frac{\partial f(4,1)}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

詳細な計算は章末問題/問 12.4 および問 13.2 を参照してください。

同様に x_2 に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{x_1^{1/2} + x_2^{1/2}}{x_2^{1/2}} \quad \text{より} \quad \frac{\partial f(4,1)}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \frac{2+1}{1} = 3$$

よって等高線の傾きは $-(3/2)/3 = -1/2$ である。

問 14.3 : 陰関数定理

方程式 $x^2 + 2y^2 = 3$ を満たす点の軌跡の点 $(x, y) = (1, 1)$ における傾きを求めよ。

解) $h(x, y) = x^2 + 2y^2$ とすると、関数 h は連続で滑らかな関数になるので点 $(x, y) = (1, 1)$ で接平面を持つことがわかる (厳密な証明の議論は本書のレベルを超えるので省略する)。陰関数定理を適用するためにあらかじめ点 $(x, y) = (1, 1)$ における偏微分係数を求めておくと、

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = 2x \quad \text{より、} \quad \frac{\partial h(1,1)}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = 4y \quad \text{より、} \quad \frac{\partial h(1,1)}{\partial y} = 4$$

ここで y に関する偏微分係数が 0 でないので陰関数定理より、方程式 $x^2 + 2y^2 = 3$ を満たす点の軌跡上では、 y は x の関数とみなすことができ、その傾きは

$$-\frac{\partial h(1,1)/\partial x}{\partial h(1,1)/\partial y} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

となる。

問 14.4 : 応用問題

横の長さ 3m、縦の長さ 4m の長方形の区画がある。

(1)横の長さを 1mm 伸ばすとき面積を一定に保つには、縦の長さをどのように変化させればよいか。等高線の傾きの知識を応用して調べよ。

解) 横の長さが x_1 m、縦の長さが x_2 m の長方形の区画の面積を S m² とすると、 S は x_1 と x_2 の関数になり、この関数を g とすると、

$$S = g(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

となる。面積を一定に保つには、等高線にそって x_1 と x_2 を動かせばよい。

等高線の傾きを調べるために、関数の偏微分係数を調べておこう。

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = x_2 \quad \text{より、} \quad \frac{\partial g(3,4)}{\partial x_1} = 4$$

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1 \quad \text{より、} \quad \frac{\partial g(3,4)}{\partial x_2} = 3$$

である。公式 (p. 277) より等高線の傾きは

$$-\frac{\partial g(3,4)/\partial x_1}{\partial g(3,4)/\partial x_2} = -\frac{4}{3}$$

である。等高線にそって横の長さを x_1 を 0.001m 長くするには、縦の長さ x_2 をそのおよそ 4/3 倍、すなわち

$$\frac{4}{3} \times 0.001 = 0.0013333\cdots$$

m (1.3mm) だけ短くすればよいことがわかる。

別解) 全微分を使った解法。全微分より、 (x_1, x_2) を $(3, 4)$ から、それぞれ微小に $\Delta x_1, \Delta x_2$ だけ変化させるとき、面積は

$$\Delta S = \frac{\partial g(3,4)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial g(3,4)}{\partial x_2} \Delta x_2$$

だけ変化する。横の長さを 1mm 伸ばすとき、すなわち $\Delta x_1 = 0.001$ とするとき、面積を一定に保つには、 $\Delta S = 0$ となるように、 Δx_2 を決めればよい。偏微分係数の値と $\Delta x_1 = 0.001$ と $\Delta S = 0$ を上の式に代入して Δx_2 について解くと、

$$0 = 4 \times 0.001 + 3 \times \Delta x_2$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = -0.004/3 = -0.001333\cdots$$

すなわち、縦の長さを 1.3mm 身近すれば良い。

(2) 横の長さを 1mm 伸ばすとき対角線の長さを一定に保つには、縦の長さをどのように変化させればよいか。等高線の傾きの知識を応用して調べよ。

解) 横の長さが x_1 m、縦の長さが x_2 m の長方形の対角線の長さを y m とすると、 y は x_1 と x_2 の関数になり、この関数を f とすると、

$$y = f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

となる。対角線の長さを一定に保つには、等高線にそって x_1 と x_2 を動かせばよい。

等高線の傾きを調べるために、関数の偏微分係数を調べておこう。

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad \text{より、} \quad \frac{\partial f(3,4)}{\partial x_1} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad \text{より、} \quad \frac{\partial f(3,4)}{\partial x_2} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

である。公式 (p. 277) より等高線の傾きは

$$-\frac{\partial f(3,4)/\partial x_1}{\partial f(3,4)/\partial x_2} = -\frac{3}{4}$$

である。等高線にそって横の長さを x_1 を 0.001m 長くするには、縦の長さ x_2 をそのおよそ 3/4 倍、すなわち

$$\frac{3}{4} \times 0.001 = 0.00075$$

m (0.75mm) だけ短くすればよいことがわかる。

問 14.5 : 応用問題

底円の半径 5m、高さ 10m の円柱形のタンクがある。半径の長さを 1mm 大きくするとき、タンクの容積を一定に保つには高さをどのように変化させればよいか。等高線の傾きの知識を応用して調べよ。

ここでは全微分を使った解法を紹介します。

解) 底円の半径が r m、高さが h m の円柱形のタンクの容積を V m³ とすると、 V は r と h の関数になり、この関数を g とすると、

$$V = g(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

となる（わからない人は章末問題/問 12.2 と 13.4 を見てください）。

全微分より、 (r, h) が $(5, 10)$ からそれぞれ微小に $\Delta r, \Delta h$ だけ変化するとき、関数の値 V はおよそ

$$\Delta V = \frac{\partial g(5,10)}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial g(5,10)}{\partial h} \Delta h$$

だけ変化する。

半径の長さを 1mm 大きくするとき、タンクの容積を一定に保つには、 $\Delta r = 0.001$ かつ $\Delta V = 0$ となるように、 Δh を決めればよい。偏微分係数はそれぞれ

$$\frac{\partial g(r, h)}{\partial r} = 2\pi r \cdot h \quad \text{より} \quad \frac{\partial g(5,10)}{\partial r} = 2\pi \times 5 \times 10 = 100\pi$$

$$\frac{\partial g(r, h)}{\partial h} = \pi r^2 \quad \text{より} \quad \frac{\partial g(5,10)}{\partial h} = 25\pi$$

となるので、求める高さの変化 Δh は次の方程式の解である。

$$0 = 100\pi \times (+0.001) + 25\pi \times \Delta h$$

これを解くと

$$\Delta h = -\frac{100\pi \times (+0.001)}{25\pi} = -0.004$$

となる。すなわち高さを約 0.004 m (4mm) だけ短くすればよい。

訂正：テキストでは mm (ミリメートル) が m (メートル) になっていました。お詫びして訂正します。

問 14.6 : 発展問題

連続な 2 変数関数において、その点を通る等高線が描けない点とはどのような点だろうか。

ヒント：地図上でその地点を通る等高線が描けない地点とはどのような地点だろうか？

解) 山の頂上や谷の底が 1 つの点になっている場合、その点と同じ高さの点は近くにないので等高線が書けない。また、水平な平面の内点では、その周りの全ての点が高さなので等高線ならぬ、等高面になってしまう。

以上