# 補論

平成 29 年 12 月 12 日更新

## 4.6 付録

### VIF の解釈

**定義 4.3** の VIF は Variance Inflation Factor (分散拡大要因) の略ですが, その意味をもう少し詳しく説明しましょう. 重回帰モデル

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_p X_{pi} + \epsilon_i, \tag{4.8}$$

において, 最小二乗法によって求められた $\hat{\beta}_j$ の分散を $Var(\hat{\beta}_j)$ とおきます. 一方, 単回帰モデル

$$Y_i = \beta_0 + \beta_j X_{ji} + \epsilon_i, \tag{4.9}$$

において, 最小二乗法によって求められた $\tilde{\beta}_j$ の分散を $Var(\tilde{\beta}_j)$ とおきます. このとき, $VIF_j$ は

$$VIF_j = \frac{Var(\hat{\beta}_j)}{Var(\tilde{\beta}_j)} \tag{4.10}$$

となることが示せます[1]. したがって

$$Var(\hat{\beta}_j) = VIF_j \times Var(\tilde{\beta}_j) \tag{4.11}$$

となり, $VIF_j$ は重回帰で他の説明変数を考慮したうえで得られる推定量の分散 $Var(\hat{\beta}_j)$ が, 単回帰で得られていた推定量の分散 $Var(\tilde{\beta}_j)$ の何倍になるかを表す因数 (factor) であることがわかります.

証明の概略は以下の通りです. 重回帰モデル[2]

$$X_{ji} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \ldots + \alpha_{j-1} X_{j-1,i} + \alpha_{j+1} X_{j+1,i} + \ldots + \alpha_p X_{pi} + u_i,$$

における総平方和 $TSS_j$ 及び残差平方和 $RSS_j$ は

$$\begin{aligned}
TSS_j &= \sum_{i=1}^{n} (X_{ji} - \overline{X}_j)^2, \quad \overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ji}, \\
RSS_j &= \sum_{i=1}^{n} (X_{ji} - \hat{X}_{ji})^2, \\
& \quad \hat{X}_{ji} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{1i} + \ldots + \hat{\alpha}_{j-1} X_{j-1,i} + \hat{\alpha}_{j+1} X_{j+1,i} + \ldots + \hat{\alpha}_p X_{pi},
\end{aligned}$$

ですので,

$$Var(\tilde{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_{ji} - \overline{X}_j)^2} = \frac{\sigma^2}{TSS_j},$$

[1] $\epsilon_i$ はいずれの回帰式でも平均 0, 分散 $\sigma^2$ で互いに無相関と仮定します.
[2] $u_i$ は誤差項です.

と表現できます．また第 3 章の付録 3.11 の偏相関における議論より，$\hat{\beta}_j$ は $Y_i$ を $X_{ji}$ 以外の説明変数に重回帰したときの残差を，$X_{ji}$ を $X_{ji}$ 以外の説明変数に重回帰したときの残差（$X_{ji} - \hat{X}_{ji}$）に単回帰したときの回帰係数であることから, その分散は

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_{ji} - \hat{X}_{ji})^2} = \frac{\sigma^2}{RSS_j},$$

となります[3]．以上より, 決定係数 $R_j^2$ は

$$R_j^2 \quad = \quad 1 - \frac{RSS_j}{TSS_j} = 1 - \frac{Var(\tilde{\beta}_j)}{Var(\hat{\beta}_j)},$$

と書くことができます．したがって

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} = \frac{Var(\hat{\beta}_j)}{Var(\tilde{\beta}_j)}$$

を得ます.

[3]残差（$X_{ji} - \hat{X}_{ji}$）の平均は 0 であることを用いています.