練習問題の解答（増刷にともなう修正）

第4章

1. (1) 資源制約式に，効用関数の式と生産関数の式を代入し，y, c_1, c_2 を消去する．

$$u_1 + u_2 = 6l_1 + 2l_2 - (l_1)^2 - (l_2)^2 \tag{4.1}$$

(2) (4.1) 式の右辺は，

$$10 - (l_1 - 3)^2 - (l_2 - 1)^2$$

と変形できる．効用フロンティアがもっとも広がるのは，$(l_1^*, l_2^*) = (3, 1)$ のときである．このときの効用フロンティアを表す式は，

$$u_1 + u_2 = 10$$

である（図は省略）．

(3) ロールズ基準のもとでも，効用フロンティアがもっとも広くなる労働配分が望ましい．したがって，$(l_1^*, l_2^*) = (3, 1)$.

次に，分配の問題は次のように定式化できる．

$$\max_{u_1,\, u_2} W = \min\{u_1, u_2\} \quad \text{s.t.} \quad u_1 + u_2 = 10$$

これを解くと，$(u_1^*, u_2^*) = (5, 5)$. このとき，$(c_1^*, c_2^*) = (14, 6)$ である．

以上をまとめると，$(l_1^*, c_1^*) = (3, 14)$, $(l_2^*, c_2^*) = (1, 6)$.

2. 作図すると，支点は60と100の間にある．間隔を1とし，60の位置を原点にとる．支点の位置をxとおくと，

$$20(2 + x) + 20(1 + x) + 60x = 100(1 - x)$$

これを解くと，$x = 0.2$. 重心は，60と100を1:4に内分する点である．

3. (1) 下図より，平均差は，$2 \times 280/16 = 35$.

	20	20	60	100
20	0	0	40	80
20	0	0	40	80
60	40	40	0	40
100	80	80	40	0

(2) 平均が50なので，ジニ係数は，$35/(2 \times 50) = 0.35$.

4. (1) ローレンツ曲線の下の領域は，1つの三角形と4つの台形からなる．したがって，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left[\alpha_1 + (\alpha_1+\alpha_2) + (\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_3+\alpha_4) + (\alpha_4+1)\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[1 + 2\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)\right]
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
g &= 1 - 2S \\
&= 1 - \frac{1}{5}\left[1 + 2\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)\right] \\
&= \frac{4}{5} - \frac{2}{5}\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)
\end{aligned}
$$

(2) 表4-5より，

$$
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = \frac{4y_1+3y_2+2y_3+y_4}{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}
$$

これを上の式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{4}{5} - \frac{2}{5}\cdot\frac{4y_1+3y_2+2y_3+y_4}{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5} \\
&= \frac{2(2y_5+y_4-y_1-2y_1)}{25\bar{y}}
\end{aligned}
$$

となり，本文の(4.17)式と一致する．

(3) (1)と同じように考えると，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\left[\alpha_1 + (\alpha_1+\alpha_2) + \cdots + (\alpha_8+\alpha_9) + (\alpha_9+1)\right] \\
&= \frac{1}{20}\left[1 + 2(\alpha_1+\cdots+\alpha_9)\right]
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
g &= 1 - 2S \\
&= 1 - \frac{1}{10}\left[1 + 2(\alpha_1+\cdots+\alpha_9)\right] \\
&= 0.9 - 0.2(\alpha_1+\cdots+\alpha_9)
\end{aligned}
$$

5. (1) 累積度数は，下の通り.

	当初所得		再分配所得	
所得階層	度数 (%)	累積度数 (%)	度数 (%)	累積度数 (%)
0-10%	0.0	0.0	1.9	1.9
10-20%	0.3	0.3	3.4	5.3
20-30%	1.0	1.3	4.7	10.0
30-40%	2.7	4.0	6.0	16.0
40-50%	5.1	9.1	7.3	23.3
50-60%	7.8	16.9	8.9	32.2
60-70%	11.0	27.9	10.7	42.9
70-80%	14.8	42.7	13.0	55.9
80-90%	20.3	63.0	16.2	72.1
90-100%	37.0	100	27.9	100

(2) 略

(3) 当初所得の場合，

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_9 = 1.652$$

である．(a4.2) 式を利用すると，ジニ係数は，

$$g = 0.5696$$

再分配所得では，

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_9 = 2.596$$

である．(a4.2) 式を利用すると，ジニ係数は，

$$g = 0.3808$$

第 13 章

1. (1) $100 - g_1 = 40$ より，$g_1^* = 60$. 地域 1 の純便益は，$\frac{1}{2} \times 60 \times 60 = 1800$.

$100 - 0.5g_2 = 40$ より，$g_2^* = 120$. 地域 2 の純便益は，$\frac{1}{2} \times 120 \times 60 = 3600$.

［図 13a］

(2) 便益は，図の台形の面積であるから，純便益は，

$$NB_1(g) = \frac{1}{2}g(100 + 100 - g) - 40g = g\left(60 - \frac{1}{2}g\right)$$
$$NB_2(g) = \frac{1}{2}g\left(100 + 100 - \frac{1}{2}g\right) - 40g = g\left(60 - \frac{1}{4}g\right)$$

(3) 純便益の総和は，

$$NB_1(g) + NB_2(g) = g\left(120 - \frac{3}{4}g\right)$$

$60 \leqq g \leqq 120$ より，$g^* = 80$ のとき最大値 4800.

2. (1) 地方政府 1 の最適化問題は，

$$\max_{g_1} u_1 = \log g_1 + \varepsilon \log g_2 - c_1 g_1$$

と定式化される．最適化の条件は，

$$\frac{\partial u_1}{\partial g_1} = \frac{1}{g_1} - c_1 = 0$$

これを解いて，

$$g_1^o = \frac{1}{c_1}$$

同様にして，

$$g_2^o = \frac{1}{c_2}$$

(2) 合併後の地方政府の最適化問題は，

$$\max_{g_1, g_2} u_1 + u_2 = (1 + \varepsilon)\log g_1 + (1 + \varepsilon)\log g_2 - c_1 g_1 - c_2 g_2$$

と定式化される．最適化の条件は，

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial g_1} = \frac{1 + \varepsilon}{g_1} - c_1 = 0$$
$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial g_2} = \frac{1 + \varepsilon}{g_2} - c_2 = 0$$

これを解いて,

$$g_1^* = \frac{1+\varepsilon}{c_1}$$
$$g_2^* = \frac{1+\varepsilon}{c_2}$$

(3) 地方政府1の最適化問題は,

$$\max_{g_1} u_1 = \log g_1 + \varepsilon \log g_2 - (1-t_1)c_1 g_1 - T_1$$

と定式化される. 最適化の条件は,

$$\frac{\partial u_1}{\partial g_1} = \frac{1}{g_1} - (1-t_1)c_1 = 0$$

これを解いて,

$$g_1 = \frac{1}{(1-t_1)c_1}$$

ここで,

$$g_1 = g_1^* \Leftrightarrow t_1^* = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

中央政府の予算制約式より,

$$T_1^* = t_1^* c_1 g_1^* = \varepsilon$$

以上から, 最適政策は,

$$(t_1^*, T_1^*) = \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \varepsilon\right)$$

同様にして,

$$(t_2^*, T_2^*) = \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \varepsilon\right)$$

3. 中央政府をリーダーとする樹形図をかく. 中央政府が「救済する(H)」を選択したときの地方政府を, 地方政府Gと呼ぼう.「救済しない(NH)」を選択したときの地方政府を, 地方政府Bと呼ぼう. 地方政府Gは,「努力する」を選択する. 地方政府Bも「努力する」を選択する. 地方政府の戦略は,(努力する, 努力する)である. 次に, 中央政府の戦略を調べる. どちらの地方政府も努力するのであれば,「救済しない(NH)」を選択した方が良い. したがって, 部分ゲーム完全均衡は, (NH, (努力する, 努力する))の1つである.

4.

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{if} \quad a \leqq x \leqq 1 \\ -(x-a) & \phantom{\text{if}} \quad 0 \leqq x \leqq a \end{cases}$$

を 用 い る と ,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x-a|\,dx &= -\int_0^a (x-a)dx + \int_a^1 (x-a)dx \\
&= -\left[\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_{x=0}^{a} + \left[\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_{x=a}^{1} \\
&= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(1-a)^2 \\
&= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

し た がって ,

$$W(a) = 1 - c\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$$

$c > 0$ よ り, 総 効 用 が 最 大 と な る の は , $a^* = \frac{1}{2}$ の と き .