第 *1* 章

演習問題

演習 1　(1)　仮説の中には，証明が困難だったり不可能だったりするものがあります．一度実証された仮説も，新しい知識によって反証されることがあるので，新しい知識が得られたときに実証することには意味があります．

(2)　事象が起こったかどうかの記録からは，2 つの事象の間の相関がわかることがあります．もし因果関係が存在したとしても，相関だけでは，因果関係が逆であったり，共変量が存在する，という仮説を反証できません．したがって，「因果関係の存在が実証された」と結論するのは短絡的です．

第 *2* 章

演習問題

演習 1　(1)　2 乗和 S^2 は，次のように μ の 2 次関数です：

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{N} x_i + N\mu^2.$$

この値が最も小さくなるのは，放物線の頂点においてなので，μ で微分した値が 0 になるような μ の値を探します．μ で微分して 0 と等しいとすると次の式が得られます：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}S^2 = 0 - 2\sum_{i=1}^{N} x_i + 2N\mu = 0.$$

これを解くと，次が得られます：

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \bar{x}.$$

(2)

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

(3)　共通の値を $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = x$ と置きましょう．このとき，標本平均は

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x = x,$$

ですので，標本分散は次のように計算されます：

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x-x)^2 = 0.$$

演習 2　　(1)

$$\begin{aligned} & s_x^2 + 2ts_{xy} + t^2 s_y^2 \\ &\quad = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 + 2t\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) + t^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2 \\ &\quad = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i-\bar{x}) + t(y_i-\bar{y})\right\}^2. \end{aligned}$$

これは実数の 2 乗和なので，0 以上の値です．

(2)　問題の 2 次方程式の左辺は，0 以上の値なので，この 2 次方程式は，重解を持つか，実数解を持たないか，のどちらかです．したがって，解の判別式を D とすると，$D \leq 0$ が必要です．

(3)　判別式は次のように計算されます：

$$D/4 = s_{xy}^2 - s_x^2 s_y^2.$$

よって，(2) の条件より

$$s_{xy}^2 - s_x^2 s_y^2 \leq 0 \Leftrightarrow s_{xy}^2 \leq s_x^2 s_y^2,$$

ですが，s_x^2 も s_y^2 も 0 でないとき，両辺を $s_x^2 s_y^2$ で割って次が得られます：

$$\frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \leq 1.$$

第 *3* 章

演 習 問 題

演習 1　事象の列 $A_1, A_2, \ldots$ がすべて族 $\mathscr{A}$ に入っているとします．このとき，(2) より，補集合の列 $A_1^{\mathrm{c}}, A_2^{\mathrm{c}}, \ldots$ もすべて族 $\mathscr{A}$ に入れる必要があります．また，(3) より，これらの和集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathrm{c}}$ も族 $\mathscr{A}$ に入れる必要があります．ふたたび (2) より，この和集合の補集合 $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}}$ も族 $\mathscr{A}$ に入れる必要がありますが，この集合は，ド・モルガンの法則より

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

ですので，(4) が示されました．

演習 2　(1)　$k < l$ としても（k と l を入れ替えて同じ話ができて）一般性を失わないので，$k < l$ とします．このとき $B_k \subseteq A_k$ です．また，$B_l = A_l \cap \left(\bigcup_{j=1}^{l-1} A_j\right)^{\mathrm{c}} = A_l \cap \left(\bigcap_{j=1}^{l-1} A_j^{\mathrm{c}}\right) \subseteq A_l \cap A_k^{\mathrm{c}} \subseteq A_k^{\mathrm{c}}$ です．つまり，$B_k \cap B_l \subseteq A_k \cap A_k^{\mathrm{c}}$ ですが，補集合の定義より $A_k \cap A_k^{\mathrm{c}} = \emptyset$ です．したがって，$B_k \cap B_l \subseteq \emptyset$ なので，$B_k \cap B_l = \emptyset$ が必要で，B_k と B_l が互いに排反であることが示されました．

(2)　i.　$\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ とします．このとき，$\omega \in B_i$ で，$1 \le i \le n$ を満たす自然数 i の値が存在します． なお，問 (1) より， $B_1, B_2, \ldots, B_n$ は互いに排反なので，このような i の値はただひとつです．B_i の決まり方より，$\omega \in B_i \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ なので，$\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ がいえます．

ii.　次に $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ とします．このとき，$\omega \in A_i$ で，$1 \le i \le n$ を満たす自然数 i の値が存在します． なお，このような i の値は複数存在するかもしれないので，そのうち最も小さいものを m と置きます．すると， $\omega \in A_m$ ですが，$\omega \notin A_1, \ldots, \omega \notin A_{m-1}$，つまり $\omega \in \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)^{\mathrm{c}}$ です．したがって，$\omega \in B_m \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ です．

iii.　上の i, ii より，$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ が示されました．

iv.　$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ については，上の i, ii, iii において $i \le n$ という条件を外して同じように示すことができます．

(3)　$p_n = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ と置きます．問 (2) より $p_n = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$ です．$B_1, B_2, \ldots$ は互いに排反なので，公理の (3) を使って $p_n = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$ と表せます．

p_n はすべての自然数に対して確率の値を表すので，$p_n \leq 1$ が成り立ちます．また，$0 \leq P(B_i)$ より p_n は単調非減少です．したがって，p_n は 1 以下のある実数に収束するので極限 $\lim_{n\to\infty} p_n = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$ が存在します．

他方で，$p = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ と置きます．問 (2) より $p = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$ です．$B_1, B_2, \ldots$ は互いに排反なので，公理の (3) を使って $p = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$ と表せます．以上より $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ が示されます．

演習 3　(1)　標本空間 Ω の定義より，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \Omega$ が必要です．

$\omega \in \Omega$ とします．このとき, 確率変数 X の実現値 $X(\omega)$ は実数です．したがって, $X(\omega) \leq i$ となる自然数 i が存在します．よって, $\omega \in \{\omega | X(\omega) \leq i\} = A_i$ となる自然数 i が存在するので，$\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ が成り立ちます．したがって，$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ です．

以上より，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ が示されます．

(2)　x を自然数としても極限の値は変わらないので，x を自然数とします．このとき,

$$\lim_{x\to\infty} P(X \leq x) = \lim_{x\to\infty} P(A_x) = \lim_{x\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{x} A_i\right),$$

です．確率の連続性と上の問 (1) より

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{x}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(\Omega),$$

ですが，公理よりこの確率の値は 1 です．

(3)　$\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ とします．このとき，すべての自然数 i に対して $\omega \in \{\omega | X(\omega) \leq x + 1/i\}$，つまり，$X(\omega) \leq x + 1/i$ が必要です．$X(\omega) = x + \delta$ と置きます．もし，$\delta > 0$ とすると，$1/\delta$ は，正の実数です．自然数 i の値が $1/\delta$ よりも大きいとき $X(\omega) = x + \delta > x + 1/i$ となるので，このような自然数 i の値に対して $\omega \notin B_i$ となってしまいます．よって，$X(\omega) \leq x$ が必要です．

ここから $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \{\omega | X(\omega) \leq x\}$ が示されます．

$X(\omega) \leq x$ のとき, すべての自然数 i に対して $x < x+1/i$ なので, すべての自然数に対して $\omega \in B_i$ が成り立ちます．以上より $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \{\omega | X(\omega) \leq x\}$ が示されます．

以上より次が示されます：

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0} P(X \leq x+\varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} P(X \leq x + 1/n) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega | X(\omega) \leq x + 1/i\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P(X \leq x).\end{aligned}$$

演習 4　(1)　事象 $\{\omega|X(\omega) \leq a\} \in \mathscr{A}$ と $\{\omega|X(\omega) \leq b\} \in \mathscr{A}$ に対して,

$$\{\omega|a < X(\omega) \leq b\} = \{\omega|X(\omega) \leq b\} \cap \{\omega|X(\omega) \leq a\}^{\mathrm{c}},$$

なので, $\{\omega|a < X(\omega) \leq b\} \in \mathscr{A}$ です.

(2)　（略）

(3)

$$\begin{aligned}P(\{\omega|X(\omega) \leq b\}) &= P(\{\omega|X(\omega) \leq a\} \cup \{\omega|a < X(\omega) \leq b\}) \\ &= P(\{\omega|X(\omega) \leq a\}) + P(\{\omega|a < X(\omega) \leq b\}),\end{aligned}$$

より $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.

演習 5　(1)　$\omega_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty}\{\omega|2-1/i < X(\omega) < 2\}$ とします．このとき，たとえば $\omega_1 \in \{\omega|1 < X(\omega) < 2\}$ が必要なので, $X(\omega_1) < 2$ が必要です． $X(\omega)$ の値が 2 よりも小さいので, $\delta > 0$ として, $X(\omega_1) = 2-\delta$ と置きます．すると, $1/d \leq i$ を満たすような自然数 i の値に対しては, $X(\omega_1) = 2-\delta \leq 2-1/i$ が成り立ってしまい，このような i の値に対しては $\omega_1 \notin \{\omega|2-1/i < X(\omega) < 2\}$ です．したがって， $\omega_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty}\{\omega|2-1/i < X(\omega) < 2\}$ となるような ω_1 は存在しないので，この事象は $\emptyset$ です.

これを利用すると次が示されます：

$$\begin{aligned}&\bigcap_{i=1}^{\infty}\{\omega\,|2-1/i < X(\omega) \leq 2\,\} \\ &\quad = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{\omega\,|2-1/i < X(\omega) < 2\,\} \cup \{\omega|X(\omega) = 2\} \\ &\quad = \{\omega|X(\omega) = 2\} \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\{\omega\,|2-1/i < X(\omega) < 2\,\}\right) \\ &\quad = \{\omega|X(\omega) = 2\} \cup \emptyset = \{\omega|X(\omega) = 2\}.\end{aligned}$$

すべての自然数 i の値に対して $2-1/i<2$ が成り立ちます．そこで，演習 4 問 (1) の結果が使えて，$\{\omega|2-1/i<X(\omega)\leq 2\}\in\mathscr{A}$ です．上の結果から，$\{\omega|X(\omega)=2\}$ は $\{\omega|2-1/i<X(\omega)\leq 2\}$ の共通部分なので，やはり $\mathscr{A}$ に含まれます．

(2)　$i<n$ のとき，$1/n<1/i$ なので，$\{\omega|2-1/n<X(\omega)\leq 2\}\subseteq\{\omega|2-1/i<X(\omega)\leq 2\}$ です．したがって，$\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega|2-1/i<X(\omega)\leq 2\}=\{\omega|2-1/n<X(\omega)\leq 2\}$ が成り立ちます．これと，演習 4 の結果を使うと問の関係が確認できます．

(3)　（略）

演習 6　(1)　$u=g^{-1}(s), v=g^{-1}(t)$ と置きます．逆関数の定義より，$s=g(u)$, $t=g(v)$ です．まず $s<t$ とします．関数 g が単調増加なので，$s<t$ のとき $u<v$ です．つまり，$g^{-1}(s)<g^{-1}(t)$ です．

次に，$g^{-1}(s)<g^{-1}(t)$ とします．このとき $u<v$ で，関数 g が単調増加なので，$s<t$ です．

以上より，関数 g^{-1} は単調増加です．

(2)　$s<t$ とします．$s\leq x\leq t$ における $f_Y(x)$ の最小値を $f_Y(m)$ とすると，$f_Y(m)>0$ です．これを使うと，$F_Y(t)-F_Y(s)=\int_s^t f_Y(x)\mathrm{d}x>(t-s)f_Y(m)>0$ なので，$F_Y(s)<F_Y(t)$ です．

$F_Y(s)<F_Y(t)$ とすると，$F_Y(t)-F_Y(s)=P(s<Y\leq t)>0$ です．$s\geq t$ のとき $P(s<Y\leq t)=0$ なので，$s<t$ が必要です．よって，分布関数 F_Y は単調増加です．

実数 a と $s<t$ に対して $F_Y(s)=F_Y(t)=a$ であったとします．分布関数 F_Y は単調増加なので，$F_Y(s)<F_Y(t)$ が成り立つはずで，これは矛盾です．よって，どのような実数 a に対しても $F_Y(s)=a$ を満たすような実数 s はひとつも存在しないか，存在するとしたらただひとつです．よって，分布関数 F_Y は逆関数を持ちます．

(3)

$$P(Y\leq F_Y^{-1}(\alpha))=F_Y(F_Y^{-1}(\alpha))=\alpha,$$

が成り立ち，$F_Y^{-1}(\alpha)$ は左側 α 分位数の条件を満たすので，$\ell_\alpha=F_Y^{-1}(\alpha)$ です．

また，確率変数 Y が連続なとき，

$$P(F_Y^{-1}(1-\alpha) \le Y) = 1 - P(Y \le F_Y^{-1}(1-\alpha))$$
$$= 1 - F_Y(F_Y^{-1}(1-\alpha)) = 1 - 1 + \alpha = \alpha,$$

が成り立つので，同じように $r_\alpha = F_Y^{-1}(1-\alpha)$ です．

演習 7　(1)　分布関数 $P(X \le x)$ は引数 x に対して，単調非減少で，$\lim_{x\to\infty} P(X \le x) = 1$ なので，$0 < \alpha < 1$ を満たすような実数 α に対して集合 $\{x|P(X \le x) \le \alpha\}$ は上に有界です．したがって，上限 (sup) は存在するので ℓ_α は存在します．

また，$\lim_{x\to-\infty} P(X \le x) = 0$ なので，上のような実数 α に対して集合 $\{x|1-\alpha \le P(X \le x)\}$ は下に有界です．したがって，下限 (inf) が存在します．分布関数は右連続なので，最小値 (min) も存在します．したがって，r_α は存在します．

(2)　分布関数を $F_X(x) = P(X \le x)$ と置きます．分布関数が連続で単調非減少のとき，やはり連続で単調非減少な逆関数 F_X^{-1} が存在します．このとき，

$$\sup\{x|F_X(x) \le \alpha\} = \sup\{x|x \le F_X^{-1}(\alpha)\} = F_X^{-1}(\alpha),$$

です．

また，次も得られます：

$$\min\{x|1-\alpha \le F_X(x)\} = \min\{x|F_X^{-1}(1-\alpha) \le x\} = F_X^{-1}(1-\alpha).$$

演習 8　(1)　$x = x_i$ とします．演習 5 と同じように $\lim_{\varepsilon\to+0} P(x_i - \varepsilon < X \le x_i) = P(X = x_i) = p_i$ が示されます．

(2)　実数 x の値が $x_1, x_2, \ldots$ のどれとも等しくないとき，$\varepsilon > 0$ の値を十分に小さくすれば区間 $(\!| x-\varepsilon, x]\!]$ が $x_1, x_2, \ldots$ を含まないようにすることができます．このとき，$X(\omega) \in (\!| x-\varepsilon, x]\!]$ を満たすような帰結 ω は存在しないので，$P(x - \varepsilon < X \le x) = P(\emptyset) = 0$ が示されます．

演習 9　（略）

演習 10　(1)

$$F_Z(x) = P(Z \le x) = \begin{cases} 0, & (x \le 0), \\ P(X^2 \le x), & (0 < x). \end{cases}$$

$0 < x$ のとき，

$$F_Z(x) = P(X^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}).$$

(2)　$x \leq 0$ のとき，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_Z(x) = 0$. $0 < x$ のとき，

$$\begin{aligned} f_Z(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_Z(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(\sqrt{x}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(-\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}f_X(-\sqrt{x}). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u f_Z(u)\mathrm{d}u &= \int_0^{\infty} u \frac{1}{2\sqrt{u}}(f_X(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u}))\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u}}{2} f_X(\sqrt{u})\mathrm{d}u - \int_0^{\infty} \frac{-\sqrt{u}}{2} f_X(-\sqrt{u})\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

ここで，1 項目の積分については，$v = \sqrt{u}$, 2 項目の積分については $v = -\sqrt{u}$ のように変数変換をすると，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u f_Z(u)\mathrm{d}u &= \int_0^{\infty} v^2 f_X(v)\mathrm{d}v + \int_{-\infty}^{0} v^2 f_X(v)\mathrm{d}v \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_X(v)\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

演習 11

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right) &= \mathrm{E}\left(X^2 - 2X\mu + \mu^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\mathrm{E}(X)\mu + \mu^2 = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mu^2. \end{aligned}$$

演習 12　$\mu = \mathrm{E}(X)$ とすると，

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(aX+b) &= \mathrm{E}\left((aX + b - \mathrm{E}(aX+b))^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left((aX + b - a\mu + b)^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left((aX - a\mu)^2\right) = a^2\mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right) = a^2\mathrm{V}(X). \end{aligned}$$

特に，$a = 0$ のとき，$V(b) = 0$.

演習 13

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{\mathrm{E}(X)-\mu}{\sigma} = 0,$$

$$\mathrm{V}(Z) = \mathrm{E}\left((Z-0)^2\right) = \mathrm{E}\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{\mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right)}{\sigma^2} = \frac{\mathrm{V}(X)}{\sigma^2} = 1.$$

第 4 章

演 習 問 題

演習 1

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{x-v} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&=\lim_{h\to 0}\left\{\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{x-v} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{x-h-v} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right\}/h \\
&=\int_{v=-\infty}^{\infty}\left\{\lim_{h\to 0}\int_{u=x-h-v}^{x-v} f(u,v)\mathrm{d}u/h\right\}\mathrm{d}v \\
&=\int_{v=-\infty}^{\infty} f(x-v,v)\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

演習 2

$$\begin{aligned}
&\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty}(u+v)f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&=\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} uf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} vf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&=\int_{u=-\infty}^{\infty} u\left\{\int_{v=-\infty}^{\infty} f(u,v)\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u+\int_{v=-\infty}^{\infty} v\left\{\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u,v)\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}v \\
&=\int_{u=-\infty}^{\infty} uf_X(u)\mathrm{d}u+\int_{v=-\infty}^{\infty} vf_Y(v)\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

演習 3　(1)　すべての自然数 i に対して $\{\omega|Y(\omega)=y\}\subseteq\{\omega|y-1/i<Y(\omega)\leq y\}$ より，$\{\omega|Y(\omega)=y\}\subseteq\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$.

ある帰結 ω_1 に対して, $Y(\omega_1)<y$ とします．このとき, $Y(\omega_1)=y-\delta$ と置くと, $0<\delta$ です．すると, i が $1/\delta$ よりも大きい自然数のとき $Y(\omega_1)<y-1/i$ なので，$\omega_1\notin B_i$ です．したがって，$\omega_1\notin\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$ です．

$y<Y(\omega_2)$ のとき $\omega\notin\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$ は明らかなので，$\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i=\{\omega|Y(\omega)=y\}$ が確認されました.

確率変数 Y の周辺密度関数を f_Y とすると,

$$P(B_i)=P(\{\omega|y-1/i<Y(\omega)\leq y\})=\int_{u=y-1/i}^{y} f_Y(u)\mathrm{d}u.$$

周辺密度関数 f_Y の値が全区間で正のとき，区間 $(\!(y-1/i,y]\!]$ における f_Y の下限を f_{Y_i} とすると，これは正の実数なので，$P(B_i)>f_{Y_i}/i>0$.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{P(\{\omega|y-1/n<Y(\omega)y\})}{1/n},$$

ここで，$\mathrm{d}y=1/n$ と置くと，この極限は次のように計算されます：

$$\lim_{\mathrm{d}y\to 0}\frac{P(y-\mathrm{d}y<Y\le y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(Y\le y).$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A\cap B_i\right)}{1/n}=\frac{\partial}{\partial y}P(X\le x,Y\le y),$$

についても同じように示されます．

定義と以上より，

$$\begin{aligned}P(X\le x|Y=y)&=\lim_{n\to\infty}\frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A\cap B_i\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)}\\&=\frac{\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A\cap B_i\right)/(1/n)}{\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)/(1/n)}\\&=\frac{\frac{\partial}{\partial y}P(X\le x,Y\le y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(Y\le y)}.\end{aligned}$$

演習 4　（略）

演習 5　(1)　確率変数 X と Y が互いに独立なとき，$P(X\le x,Y\le y)$ が成り立ちます．これを微分すると，

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}P(X\le x,Y\le y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}P(X\le x)P(Y\le y)\\&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(X\le x)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(Y\le y)\right)=f_X(x)f_Y(y).\end{aligned}$$

(2)　問 (1) の結果を使うと，次が得られます：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY)&=\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty}uvf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{v=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty}uvf_X(u)f_Y(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{u=-\infty}^{\infty}uf_X(u)\mathrm{d}u\int_{v=-\infty}^{\infty}vf_Y(v)\mathrm{d}v=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).\end{aligned}$$

(3)　問 (2) で uv を $g_X(u)g_Y(v)$ に入れ替えると示すことができます．

(4) 期待値は次のように計算されます：

$$\mathrm{E}(ZW) = 0 \times 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$
$$\mathrm{E}(Z) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1,$$
$$\mathrm{E}(W) = 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

よって，$\mathrm{E}(ZW) = \mathrm{E}(Z)\mathrm{E}(W)$ が成り立ちます．分布関数については，たとえば $x = y = 0$ について次のように計算されます：

$$P(Z \leq 0, W \leq 0) = \frac{1}{3},$$
$$P(Z \leq 0) = \frac{1}{3},$$
$$P(W \leq 0) = \frac{1}{3}.$$

よって，$P(Z \leq 0, W \leq 0) \neq P(Z \leq 0)P(W \leq 0)$ となり，独立ではありません．

演習 6　確率変数 X, Y, Z の期待値をそれぞれ μ_X, μ_Y, μ_Z と置きます．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) \\
&= \mathrm{E}((Y - \mu_Y)(X - \mu_X)) = \mathrm{Cov}(Y, X), \\
\mathrm{Cov}(X, X) &= \mathrm{E}((X - \mu_X)(X - \mu_X)) = \mathrm{E}\left((X - \mu_X)^2\right) = V(X), \\
\mathrm{Cov}(X, aY + bZ + c) &= \mathrm{E}((X - \mu_X)(aY + bZ + c - a\mu_Y - b\mu_Z - c)) \\
&= \mathrm{E}((X - \mu_X)\{a(Y - \mu_Y) + b(Z - \mu_Z)\}) \\
&= a\mathrm{E}((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) + b\mathrm{E}((X - \mu_X)(Z - \mu_Z)) \\
&= a\mathrm{Cov}(X, Y) + b\mathrm{Cov}(X, Z).
\end{aligned}$$

演習 7　確率変数 X, Y と実数 t, 帰結 ω に対して，確率変数 $(X + tY)^2$ の実現値 $(X(\omega) + tY(\omega))^2$ の値は常に非負です．したがって，期待値は次のように非負であることが示されます：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left((X + tY)^2\right) &= \int_{v=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} (u + tv)^2 P(u - \mathrm{d}u < X \leq u, v - \mathrm{d}v < Y \leq v) \\
&\geq \int_{v=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} 0 \times P(u - \mathrm{d}u < X \leq u, v - \mathrm{d}v < Y \leq v) = 0.
\end{aligned}$$

上の関係は確率変数が何であっても成り立つので，確率変数 X, Y の期待値をそれ

ぞれ μ_X, μ_Y として，確率変数 $X-\mu_X, Y-\mu_Y$ に対しても次が成り立ちます：

$$\mathrm{E}\left(\{X-\mu_X+t(Y-\mu_Y)\}^2\right) \geq 0$$

期待値を展開すると次が得られます：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\{X-\mu_X+t(Y-\mu_Y)\}^2\right) &= \mathrm{E}\left((X-\mu_X)^2\right)+2t\mathrm{E}((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) \\ &\quad + t^2\mathrm{E}\left((Y-\mu_Y)^2\right) \\ &= \mathrm{V}(X)+2t\mathrm{Cov}(X,Y)+t^2\mathrm{V}(Y) \geq 0.\end{aligned}$$

これを実数 t に関する 2 次式とみると，値が非負になるためには判別式が 0 または負であることが必要十分なので，

$$D/4 = \{\mathrm{Cov}(X,Y)\}^2 - \mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y) \leq 0.$$

が成り立ちます．これを整理すると次が得られます：

$$-1 \leq \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}} = \mathrm{Corr}(X,Y) \leq 1.$$

演習 8　i) $N=2$ のとき，

$$\mathrm{E}(S_2) = \mathrm{E}(X_1+X_2) = \mathrm{E}(X_1)+\mathrm{E}(X_2),$$

は（演習 2 などで）示されています．

ii) $k \geq 2$ とします．$N=k$ に対して

$$\mathrm{E}(S_k) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}(X_i),$$

が成り立つとします．このとき，$N=k+1$ に対して， i) と仮定を使うと次が得られます：

$$\mathrm{E}(S_{k+1}) = \mathrm{E}(S_k+X_{k+1}) = \mathrm{E}(S_k)+\mathrm{E}(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}\mathrm{E}(X_{k+1}).$$

iii)以上， i), ii) より命題は示されます．

演習 9　（略．メモ 4.33 参照）

第 5 章

演 習 問 題

演習 1　(1)　$v = \frac{u-\mu}{\sigma}$ とおくと，$\mathrm{d}v = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}u$ です．また積分範囲は，$u : -\infty \to \infty$ に対し $v : -\infty \to \infty$ です．したがって，$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} \mathrm{d}v$ です．

(2)

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} \mathrm{d}v \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{w^2}{2}} \mathrm{d}w \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{w^2}{2}} \mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{v^2+w^2}{2}} \mathrm{d}v\mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

(3)　$(v, w) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ のように極座標で表します．ヤコビアン行列は次のように計算されます：

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

この行列式は次の通り：

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&\qquad = \cos\theta \times r\cos\theta - (-r\sin\theta) \times \sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.
\end{aligned}$$

したがって，$\mathrm{d}v\mathrm{d}w = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$ です．積分範囲は $v - w$ 平面全体なので，極座標では，$\theta : 0 \to 2\pi$, $r : 0 \to \infty$ となります．したがって次が得られます：

$$I^2 = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

(4)　$s = \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}$ と置くと，$-\mathrm{d}s = r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r$ です．また，積分範囲は $r : 0 \to \infty$ のとき $s : 1 \to 0$ です．したがって，

$$\int_{r=0}^{\infty} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r = \int_{s=1}^{0} -\mathrm{d}s = \int_{s=0}^{1} \mathrm{d}s = [s]_{s=0}^{1} = 1,$$

です．したがって，

$$I^2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0\infty} \frac{1}{2\pi} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \times 1 \times \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} [\theta]_{\theta=0}^{2\pi} = 1.$$

よって，$I=\pm 1$ ですが，被積分関数が正なので，$0<I$ が必要で，$I=1$ です.

演習 2　$v=\frac{u-\mu}{\sigma}$ と置くと，$u=\sigma v+\mu$, $\mathrm{d}v=\frac{1}{\sigma}\mathrm{d}u$ です．また積分範囲は $v: -\infty \to \infty$ なので，次のように計算できます：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u &= \int_{-\infty}^{\infty}(\sigma v+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v\\ &= \sigma\int_{-\infty}^{\infty} v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v+\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

最後の式の中で，1 番目の積分は，被積分函数 $v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}$ は原点に対して線対称なので，全区間で積分すると 0 になります．また 2 番目の積分は標準正規分布の密度関数の積分なので，1 になります．したがって，この式の値は μ になります. また，分散についても次のように計算されます：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(u-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} &= \int_{-\infty}^{\infty}(\sigma v)^2\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v\\ &= \sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} v^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}=-v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}+v^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}$ より，$v^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}$ です．これを代入すると次が得られます：

$$\begin{aligned}&=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\right)\mathrm{d}v\\ &=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v+\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v\\ &=\sigma^2+\sigma^2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\right]_{v=-\infty}^{\infty}\\ &=\sigma^2+\left[-v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\right]_{v=-\infty}^{\infty}\\ &=\sigma^2+0=\sigma^2.\end{aligned}$$

演習 3　(1)　$0<a$ とします．確率変数 Z の分布関数を F_Z と置くと，次のように計算されます：

$$F_Z(x)=P(Z\leq x)=P(aX+b\leq x)$$

$$= P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}u.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_Z(x) &= \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}u \right. \\
&\qquad \left. - \int_{-\infty}^{\frac{x-\mathrm{d}x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}u \right) / \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \int_{\frac{x-b}{a} - \frac{\mathrm{d}x}{a}}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}u / \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\mathrm{d}x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\frac{x-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{\mathrm{d}x}{a} / \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma a)^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x-(\mu+b)^2}{(\sigma a)^2}}.
\end{aligned}$$

これは，期待値 $\mu + b$, 分散 $(\sigma a)^2$ の正規分布の確率密度関数です． $a < 0$ の場合も同様に示されます． $a = 0$ の場合 Z は定数なので，正規分布に従いません．

演習 4

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{Cov}(Z_1 + 2Z_2, 1 + 2Z_1 + 3Z_2) \\
&= \mathrm{Cov}(Z_1, 1) + \mathrm{Cov}(2Z_2, 1) + \mathrm{Cov}(Z_1, 2Z_1) \\
&\quad + \mathrm{Cov}(2Z_2, 2Z_1) + \mathrm{Cov}(Z_1, 3Z_2) + \mathrm{Cov}(2Z_2, 3Z_2) \\
&= 2\mathrm{V}(Z_1) + 2 \times 3\mathrm{V}(Z_2) \\
&= 2 \times 1 + 6 \times 1 = 8.
\end{aligned}$$

演習 5　(1)　標準正規変数 Z_1, Z_2 は互いに独立なので，同時密度関数は周辺密度関数の積です：

$$f_{Z_1 Z_2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= P(a_1 Z_1 + a_2 Z_2 \leq x) \\
&= P(Z_2 \leq (x - a_1 Z_1)/a_2)
\end{aligned}$$

$$= \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{(x-a_1u)/a_2} f_{Z_1Z_2}(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$
$$= \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{(x-a_1u)/a_2} \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(X \le x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{x/a_2-a_1u/a_2} \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v=-\infty}^{x/a_2-a_1u/a_2} \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi a_2}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+(x/a_2-a_1u/a_2)^2}{2}}\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi a_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{a_1^2}{a_2^2}\right)u^2-2\frac{a_1x}{a_2^2}u+\frac{x^2}{a_2^2}\right\}} \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi a_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{a_1^2+a_2^2}{a_2^2}\left(u-\frac{a_1x}{a_1^2+a_2^2}\right)^2+\frac{x^2}{a_1^2+a_2^2}\right\}}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

ここで，$b_0 = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $b_1 = a_1/\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $b_2 = a_2/\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ と置くと，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(X \le x) &= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi a_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(u-b_1x)^2}{b_2^2}+\frac{x^2}{b_0^2}\right\}}\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(u-b_1x)^2}{2b_2^2}}\mathrm{d}u \times \frac{b_2}{\sqrt{2\pi}a_2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b_0^2}} \\
&= 1 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi b_0^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b_0^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a_1^2+a_2^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\left(a_1^2+a_2^2\right)}}.
\end{aligned}$$

演習 6　（略）

演習 7　(1)　確率変数 $U = Z_1$ は定義より標準正規変数です．確率変数 $V = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2$ は標準正規変数の線形和なので正規変数です．その期待値が $\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2) = 0$ で，分散が $\mathrm{V}(V) = \mathrm{V}(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_1) = 1$ なので，確率変数 V は標準正規変数です．

共分散は， $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{Cov}(Z_1, \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2) = \rho$ と計算され，$\mathrm{V}(U) = \mathrm{V}(V) = 1$ なので，$\mathrm{Corr}(U,V) = \rho$ です．

(2)

$$\begin{aligned} P(U \le x, V \le y) &= P(Z_1 \le x, \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2 \le y) \\ &= \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{(y-\rho u)/\sqrt{1-\rho^2}} \phi(u)\phi(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= \int_{u=-\infty}^{x} \phi(u)\Phi\left(\frac{y-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f_{UV}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(U \le x, V \le y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{u=-\infty}^{x} \phi(u) \frac{\partial}{\partial y}\Phi\left(\frac{y-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{u=-\infty}^{x} \phi(u)\phi\left(\frac{y-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\phi(x)\phi\left(\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\rho x)^2/(1-\rho^2)}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{1-\rho^2}}. \end{aligned}$$

(4)　（略）

(5)

$$\begin{aligned} P(X \le x, Y \le y) &= P(\sigma_X U + \mu_X \le x, \sigma_Y V + \mu_Y \le y) \\ &= P\left(U \le \frac{x-\mu_X}{\sigma_X}, V \le \frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right), \end{aligned}$$

なので，次のように計算できます：

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}P(X \le x, Y \le y) = \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}f_{UV}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}}.$$

演習 8　(1)

$$P(Z^2 \le x) = \begin{cases} 0, & (x \le 0), \\ P(-\sqrt{x} \le Z \le \sqrt{x}), & (0 < x), \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & (x \le 0), \\ P(Z \le \sqrt{x}) - P(Z \le -\sqrt{x}), & (0 < x), \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & (x \le 0), \\ \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}), & (0 < x). \end{cases}$$

(2)　$0 \le x$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P(Z^2 \le x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\big) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\phi(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\phi(-\sqrt{x}), \end{aligned}$$

ですが，$\phi(\sqrt{x}) = \phi(-\sqrt{x})$ なので，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P(Z^2 \le x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\phi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}.$$

演習 9　(1)

$$\begin{aligned} P(t_1 \le x) &= P(Z_0/|Z_1| \le x) \\ &= P(Z_0 \le x|Z_1|) \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{x|u|} \phi(u)\phi(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= \int_{u=-\infty}^{0}\int_{v=-\infty}^{-xu} \phi(u)\phi(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u + \int_{u=0}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{xu} \phi(u)\phi(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= \int_{u=-\infty}^{0} \phi(u)\Phi(-ux)\mathrm{d}u + \int_{u=0}^{\infty} \phi(u)\Phi(ux)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

(2)　問 (1) の最後の式の 1 番目の積分で $v = -u$ と変数変換をすると, $\mathrm{d}v = -\mathrm{d}u$ で，積分範囲は $v : \infty \to 0$ になります：

$$\begin{aligned} P(t_1 \le x) &= \int_{v=\infty}^{0} \phi(v)\Phi(vx)(-\mathrm{d}v) + \int_{u=0}^{\infty} \phi(u)\Phi(ux)\mathrm{d}u \\ &= 2\int_{u=0}^{\infty} \phi(u)\Phi(ux)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

これを微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(t_1 \le x) = 2\int_{u=0}^{\infty} u\phi(u)\phi(ux)\mathrm{d}u,$$

が得られます．（テキストでは $2\int_{u=0}^{\infty}\phi(u)\phi(ux)\mathrm{d}u$ になっていました．すみません．）

(3)　問 (2) の式を整理すると次が得られます：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(t_1 \le x) &= 2\int_0^{\infty} u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(ux)^2}{2}}\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{\infty} u\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(1+x^2)u^2}{2}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

$v = \sqrt{1+x^2}u$ とすると，$\mathrm{d}v = \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}u$ で，積分範囲は $v : 0 \to \infty$ なので，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(t_1 \le x) = \int_0^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{v}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}\int_0^{\infty} v\phi(v)\mathrm{d}v,$$

が得られます．ここで $w = \phi(v)$ とすると， $\mathrm{d}w = -v\phi(v)\mathrm{d}v$ で，積分範囲は $w : 1/\sqrt{2\pi} \to 0$ です．したがって次が得られます：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(t_1 \le x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}\int_{w=1/\sqrt{2\pi}}^{0}(-\mathrm{d}w) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}\int_0^{1/\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}w \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\pi(1+x^2)}.\end{aligned}$$

第 *6* 章

演 習 問 題

演習 1　(1)　尤度は，確率密度関数 f に観測値を代入したものの積です．$a = 2$ とすると，観測値が 2 より大きい場合，確率密度関数 f に観測値を代入した値は 0 になります．したがって，観測値の中に 2 よりも大きいものが含まれている場合尤度は 0 になります．与えられたデータの場合，

$4.6, 3.0, 4.7, 4.8, 3.5, 4.4, 3.2$ が 2 よりも大きいので，尤度の値は 0 です．$a = 5$ とすると，5 よりも大きい観測値はありません．このとき，確率密度関数に観測値を代入した値は 1/5 です．したがって，尤度の値はこれを 10 個掛けて $1/5^{10}$ です．同じように，$a = 6$ とすると，尤度の値は $1/6^{10}$ です．

(2)　パラメータ a の値よりも大きな観測値があると尤度の値は 0 になります．また，パラメータ a の値がよりも大きな観測値がない場合，尤度は a に対して単調減少です．したがって，尤度が最も大きくなるのは，a の値が観測値のうち最も大きいもの，4.8 と等しいときです．したがって，最尤推定値は $\tilde{a} = 4.8$ です．

(3)

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)\mathrm{d}u = \int_0^a u\frac{1}{a}\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}u^2\frac{1}{a}\right]_{u=0}^a = a/2.$$

(4)

$$\hat{\mu} = (1.2 + 4.6 + 1.5 + 3.0 + 1.6 + 4.7 + 4.8 + 3.5 + 4.4 + 3.2)/10 = 3.25.$$

(5)

$$\hat{a} = 2\hat{\mu} = 6.5.$$

演習 2　$Y_1, \ldots, Y_5$ が互いに独立であることを仮定すると，共分散の値が 0 になるので次のように計算されます：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left((\hat{\mu} - \mu)^2\right) &= \mathrm{E}\left(\left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 X_i - \mu\right)^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 (X_i - \mu)\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{25}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^5 (Y_i - \mu)^2 + 2\sum_{i=1}^4\sum_{j=i+1}^5 (Y_i - \mu)(Y_j - \mu)\right) \\
&= \frac{1}{25}\left\{\sum_{i=1}^5 \mathrm{E}\left((Y_i - \mu)^2\right) + 2\sum_{i=1}^4\sum_{j=i+1}^5 \mathrm{E}\left((Y_i - \mu)(Y_j - \mu)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{25}\left\{\sum_{i=1}^5 \mathrm{V}(Y_i) + 2\sum_{i=1}^4\sum_{j=i+1}^5 \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{25} \times 5\sigma^2 + 0 = \frac{\sigma^2}{5}.$$

演習 3　(1)

$$\mathrm{E}(X_i^2) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mu^2 + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

(2)　独立性を仮定すると，$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ が使えるので次が得られます：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(Y_i - \bar{Y})^2\right) &= \frac{1}{5}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{5}\{Y_i - \mu - (\bar{Y} - \mu)\}^2\right) \\
&= \frac{1}{5}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{5}\{(Y_i - \mu)^2 - 2(Y_i - \mu)(\bar{Y} - \mu) + (\bar{Y} - \mu)^2\}\right) \\
&= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\mathrm{V}(Y_i) - 2\mathrm{Cov}(Y_i, \bar{Y}) + \mathrm{V}(\bar{Y})) \\
&= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\sigma^2 - 2\mathrm{Cov}(Y_i, (Y_1 + \cdots + Y_5)/5) + \sigma^2/5) \\
&= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\sigma^2 - 2\sigma^2/5 + \sigma^2/5) = \sigma^2 - \sigma^2/5.
\end{aligned}$$

演習 4　(1)　（略）

(2)　$\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon' = \sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - |\mu|$ とします．$0 < \sqrt{\mu^2 + \varepsilon}$, $0 \le |\mu|$ かつ $\mu^2 + \varepsilon > \mu^2$ なので，$\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} > |\mu|$ です．したがって，$\varepsilon' > 0$ です．

まず $0 < \mu$ の場合を考えます．

i.　$\mu^2 < \varepsilon$ とすると，次が得られます：

$$\begin{aligned}
\varepsilon < |\bar{X}^2 - \mu^2| &\Leftrightarrow \bar{X}^2 - \mu^2 < -\varepsilon,\ \varepsilon < \bar{X}^2 - \mu^2, \\
&\Leftrightarrow \bar{X}^2 < \mu^2 - \varepsilon,\ \mu^2 + \varepsilon < \bar{X}^2, \\
&\Leftrightarrow \mu^2 + \varepsilon < \bar{X}^2, \\
&\Leftrightarrow \bar{X} < -\sqrt{\mu^2 + \varepsilon},\ \sqrt{\mu^2 + \varepsilon} < \bar{X}. \\
&\Leftrightarrow \bar{X} - \mu < -\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu,\ \sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu < \bar{X} - \mu.
\end{aligned}$$

ここで，$-\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu < -\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} + \mu$ なので，

$$\begin{aligned}
\varepsilon < |\bar{X}^2 - \mu^2| &\Rightarrow \bar{X} - \mu < -(\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu),\ \sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu < \bar{X} - \mu, \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu < |\bar{X} - \mu|.
\end{aligned}$$

よって，$\varepsilon < |\bar{X}^2 - \mu^2| \Rightarrow \varepsilon' < |\bar{X} - \mu|$ です．

ii. $0 < \varepsilon \le \mu^2$ とすると，次が得られます：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon < |\bar{X}^2 - \mu^2| &\Leftrightarrow \bar{X}^2 - \mu^2 < -\varepsilon,\ \varepsilon < \bar{X}^2 - \mu^2, \\
&\Leftrightarrow \bar{X}^2 < \mu^2 - \varepsilon,\ \mu^2 + \varepsilon < \bar{X}^2, \\
&\Leftrightarrow \bar{X} < -\sqrt{\mu^2 + \varepsilon}, \\
&\qquad -\sqrt{\mu^2 - \varepsilon} < \bar{X} < \sqrt{\mu^2 - \varepsilon}, \\
&\qquad \sqrt{\mu^2 + \varepsilon} < \bar{X}. \\
&\Leftrightarrow \bar{X} - \mu < -\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu, \\
&\qquad -\sqrt{\mu^2 - \varepsilon} - \mu < \bar{X} - \mu < \sqrt{\mu^2 - \varepsilon} - \mu, \\
&\qquad \sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu < \bar{X} - \mu.
\end{aligned}
$$

ここで，$\sqrt{\mu^2 - \varepsilon} - \mu < -\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} + \mu$ は次のように示すことができます：

$$(\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} + \sqrt{\mu^2 - \varepsilon})^2 = \mu^2 + \varepsilon + \mu^2 - \varepsilon + 2\sqrt{\mu^4 - \varepsilon^2} < 4\mu^2,$$

なので，

$$\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} + \sqrt{\mu^2 - \varepsilon} < 2\mu,$$

より $\sqrt{\mu^2 - \varepsilon} - \mu < -\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} + \mu$ です．よって，

$$\varepsilon < |\bar{X}^2 - \mu^2| \Rightarrow \bar{X} - \mu < -(\sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu), \sqrt{\mu^2 + \varepsilon} - \mu < \bar{X} - \mu,$$

なので，i. と同じように $\varepsilon < |\bar{X}^2 - \mu^2| \Rightarrow \varepsilon' < |\bar{X} - \mu|$ です．

$\mu < 0$ の場合も同じように示すことができるので，

$$\{\omega | \varepsilon < |\bar{X}^2(\omega) - \mu^2|\} \subseteq \{\omega | \varepsilon' < |\bar{X}(\omega) - \mu|\},$$

です．

この結果より，すべての自然数 N に対して，$P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon') \ge P(|\bar{X}^2 - \mu^2| > \varepsilon) \ge 0$ が成り立ちます．したがって，$\lim_{N\to\infty} P(|\bar{X}^2 - \mu^2| > \varepsilon) = 0$ が成り立ちます．

(3) 実数 $\varepsilon > 0$ に対して，$|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \bar{X}^2 - \sigma^2| > \varepsilon$ であるとします．また，次は常に成り立ちます：

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-\bar{X}^2-\sigma^2\right|=\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-(\sigma^2+\mu^2)-(\bar{X}^2-\mu^2)\right|$$
$$<\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-(\sigma^2+\mu^2)\right|+|\bar{X}^2-\mu^2|.$$

これらから次が成り立ちます：

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-(\sigma^2+\mu^2)\right|+|\bar{X}^2-\mu^2|>\varepsilon>0.$$

このとき，$|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-(\sigma^2+\mu^2)|$ か $|\bar{X}^2-\mu^2|$ のうち少なくともどちらかは（0 でなく）正の値であることが必要です．したがって，実数 $\varepsilon'>0,\varepsilon''>0$ が存在して，$|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-(\sigma^2+\mu^2)|>\varepsilon''$ か $|\bar{X}^2-\mu^2|>\varepsilon'$ のどちらかが成り立ちます．したがって，次の関係を満たすような $\varepsilon'>,\varepsilon''>0$ が存在します：

$$\left\{\omega\,\middle|\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2(\omega)-\bar{X}^2(\omega)-\sigma^2\right|>\varepsilon\right\}$$
$$\subseteq\left\{\omega\,\middle|\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2(\omega)-(\sigma^2+\mu^2)\right|>\varepsilon''\right\}\cup\left\{\omega\,\middle||\bar{X}^2(\omega)-\mu^2|>\varepsilon'\right\}.$$

つまり，次が成り立ちます：

$$\begin{aligned}0\leq &P\left(\left\{\omega\,\middle|\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2(\omega)-\bar{X}^2(\omega)-\sigma^2\right|>\varepsilon\right\}\right)\\&\leq P\left(\left\{\omega\,\middle|\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2(\omega)-(\sigma^2+\mu^2)\right|>\varepsilon''\right\}\cup\left\{\omega\,\middle||\bar{X}^2(\omega)-\mu^2|>\varepsilon'\right\}\right)\\&\leq P\left(\left\{\omega\,\middle|\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2(\omega)-(\sigma^2+\mu^2)\right|>\varepsilon''\right\}\right)+P\left(\left\{\omega\,\middle||\bar{X}^2(\omega)-\mu^2|>\varepsilon'\right\}\right).\end{aligned}$$

これがすべての自然数 N に対して成り立つことと，問 (1), (2) の結果より，次が示されます：

$$\lim_{N\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-\bar{X}^2-\sigma^2\right|>\varepsilon\right)=0.$$

演習 5　(1)　演習 3 の結果を使うと次のように計算できます：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{\mu}^2) &= \frac{1}{N^2}\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_i X_j\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\left(N(\sigma^2+\mu^2) + (N^2-N)\mu^2\right) \\
&= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{N} \neq \mu^2.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\hat{\mu}^2_{\mathrm{ub}}\right) &= \mathrm{E}\left(\hat{\mu}^2 - \frac{\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ub}}}{N}\right) \\
&= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{N} - \frac{\sigma^2}{N} = \mu^2.
\end{aligned}
$$

よって不偏です.

(3) 推定の目標であるパラメータ μ^2 は非負ですが，不偏推定量 $\hat{\mu}^2_{\mathrm{ub}}$ の実現値は負になることがあります．したがって，推定値 $\hat{\mu}^2_{\mathrm{ub}}(\omega)$ が負になった場合，0 の方が μ^2 に近いです．この意味で，推定量 $\hat{\mu}^2_{+}$ の方が良い推定量といえます.

演習 6 (1)

$$
\hat{a} = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i, \quad \tilde{a} = \max_{i=1,\ldots,N}\{X_i\}.
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i) &= \int_0^a u\frac{1}{a}\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{a}\frac{1}{2}u^2\right]_{u=0}^{a} = \frac{a}{2}, \\
\mathrm{V}(X_i) &= \int_0^a u^2\frac{1}{a}\mathrm{d}u - \frac{4}{a^2} = \left[\frac{1}{a}\frac{1}{3}u^3\right]_{u=0}^{a} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{a}) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathrm{E}(X_i) = \frac{a}{2}, \\
\mathrm{V}(\hat{a}) &= \frac{1}{N}\mathrm{V}(X_i) = \frac{\sigma^2}{N}.
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
P(\tilde{a} \le x) &= P(\max\{X_1, \dots, X_N\} \le x) \\
&= P(X_1 \le x, \dots, X_N \le x) \\
&= P(X_1 \le x) \times \cdots \times P(X_N \le x) \\
&= \{P(X_i \le x)\}^N \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \mathrm{d}u \right\}^N \\
&= \begin{cases} 0, & (x \le 0), \\ \frac{x^N}{a^N}, & (0 < x \le a), \\ 1, & (a < x). \end{cases}
\end{aligned}
$$

(5)　$0 < \varepsilon \le a$ のときは次の通り：

$$
P(|\tilde{a} - a| > \varepsilon) = P(\tilde{a} < a - \varepsilon) = \frac{(a-\varepsilon)^N}{a^N}.
$$

$a < \varepsilon$ のときは，$P(|\tilde{a} - a| > \varepsilon) = 0$ です．

また，$\lim_{N\to\infty} P(|\tilde{a} - a| > \varepsilon) = \lim_{N\to\infty}\{(a-\varepsilon)/a\}^N = 0$ なので，$\tilde{a}$ は一致推定量です．

(6)　推定量の確率密度関数は次の通りです：

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P(\tilde{a} \le x) = \begin{cases} 0, & (x \le 0), \\ \frac{Nx^{N-1}}{a^N}, & (0 < x \le a), \\ 0, & (a < x). \end{cases}
$$

よって，期待値と分散は次ように計算されます：

$$
\mathrm{E}(\tilde{a}) = \int_0^a u \frac{Nu^{N-1}}{a^N} \mathrm{d}u = \int_0^a \frac{N}{a^N} u^N \mathrm{d}u = \left[\frac{N}{a^N} \frac{u^{N+1}}{N+1} \right]_{u=0}^a = \frac{N}{N+1} a,
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\tilde{a}) &= \int_0^a u^2 \frac{Nu^{N-1}}{a^N} \mathrm{d}u - \left(\frac{N}{N+1} a \right)^2 \\
&= \left[\frac{N}{a^N} \frac{u^{N+2}}{N+2} \right]_{u=0}^a - \frac{N^2}{(N+1)^2} a^2 \\
&= \left(\frac{N}{N+2} - \frac{N^2}{(N+1)^2} \right) a^2 \\
&= \frac{N}{(N+1)^2 (N+2)} a^2.
\end{aligned}
$$

$\mathrm{E}(\tilde{a}) \neq a$ なので，これは不偏ではありません．偏りの大きさは $a/(N+1)$

です.

(7)　$N=10$ のとき,

$$\mathrm{V}(\hat{a})=\frac{a^2}{10}>\mathrm{V}(\tilde{a})=\frac{10a^2}{1452},$$

なので，最尤推定量 $\tilde{a}$ の方が効率的です.

最小 2 乗推定量の標準偏差は $\sqrt{a^2/10}\simeq 0.32a$ です．つまり，最小 2 乗推定値は目標の a から $0.32a$ 程度はずれていることが見込まれます.

また最尤推定量の標準偏差は $\sqrt{10a/1452}\simeq 0.083a$ です．しかし，最尤推定量は $a/11\simeq 0.091a$ の偏りを持っています．偏りと標準偏差を合わせても，最尤推定値に見込まれるずれは $0.091a+0.083a=0.174a$ 程度です．見込まれるずれから判断すると，最尤推定値 $\tilde{a}(\omega)=4.8$ の方が最小 2 乗推定値 $\hat{a}(\omega)=6.5$ よりも良いといえます.

なお，N が更に大きくなった場合，最尤推定量の偏りは更に小さくなります．また，効率性が上がる速度も最尤推定量の方が高いので，最尤推定量の優位性は，よりはっきりします.

演習 7

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(z(Y,\theta)) &= \int_{u=-\infty}^{\infty} z(u,\theta)f(u|\theta)\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\log f(u|t)|_{t=\theta} f(u|\theta)\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial t}f(u|t)|_{t=\theta}}{f(u|t)|_{t=\theta}} f(u|\theta)\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}f(u|t)|_{t=\theta}\mathrm{d}u \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u|t)\mathrm{d}u\bigg|_{t=\theta} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}1\bigg|_{t=\theta} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial t}z(Y,t)\bigg|_{t=\theta}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\frac{\partial}{\partial t}f(Y|t)}{f(Y|t)}\bigg|_{t=\theta}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(Y|t)\right)f(Y|t)-\left(\frac{\partial}{\partial t}f(Y|t)\right)^2}{f(Y|t)^2}\Bigg|_{t=\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{E}\left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(Y|t)\Big|_{t=\theta}}{f(Y|t)|_{t=\theta}}\right) - \mathrm{E}\left(\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} f(Y|t)}{f(Y|t)}\right)^2\Bigg|_{t=\theta}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(Y|t)\Bigg|_{t=\theta} \mathrm{d}u - E((z(Y,\theta))^2)$$

$$= 0 - \mathrm{V}(z(Y,\theta)) = \mathrm{V}(z(Y,\theta)).$$

第 *7* 章

演 習 問 題

演習 1　(1)　$Y_i \sim \mathrm{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$ なので，その確率密度関数は次の通りです：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_i} P(Y_i \leq u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(u_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2}{2\sigma^2}}.$$

(2)　誤差が互いに独立であると仮定すると，被説明変数 $Y_1, \ldots, Y_N$ も互いに独立なので，同時密度関数は次のように周辺密度関数の積になります：

$$\frac{\partial^N}{\partial u_1 \cdots \partial u_N} P(Y_1 \leq u_1, \ldots, Y_N \leq u_N) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(u_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{N} (u_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2}{2\sigma^2}}.$$

(3)

$$L = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ell = -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2.$$

(4)

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} \ell = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))(-1)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1}\ell = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} 2(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))(-x_i)$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i y_i - \beta_0 x_i - \beta_1 x_i^2) = 0.$$

なおこれらは，最小 2 乗推定値を求める式と同じです.

(5)　最尤推定値 $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1$ をそれぞれ β_0, β_1 に代入すると，対数尤度は次のように計算されます：

$$\ell = -\frac{N}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \tilde{\beta}_0 - \beta_1 x_i)^2$$
$$= -\frac{N}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\tilde{e}_i^2.$$

これを σ^2 で微分して，0 とすると次が得られます：

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{N}{2}\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4}\times(-1)\times\sum_{i=1}^{N}\tilde{e}_i^2$$
$$= -\frac{1}{2N\sigma^4}\left(\sigma^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{e}_i^2\right) = 0.$$

つまり，分散 σ^2 の最尤推定量は

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{e}_i^2,$$

です.

演習 2　（略）

演習 3　（略）

演習 4

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{N}(\hat{\mu}_i + \hat{e}_i - \bar{y})^2$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\left((\hat{\mu}_i - \bar{y})^2 + \hat{e}_i^2 + 2(\hat{\mu}_i - \bar{y})\hat{e}_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{N}(\hat{\mu}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{N}\hat{e}_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{\mu}_i\hat{e}_i - \sum_{i=1}^{N}\bar{y}\hat{e}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(\hat{\mu}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{N}\hat{e}_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{N}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)\hat{e}_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{N}\hat{e}_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{N}(\hat{\mu}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{N}\hat{e}_i^2.$$

演習 5

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{N}(\hat{\mu} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}\{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x} + \bar{\hat{e}})\}^2}{S_y^2} \\ &= \frac{\hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{S_y^2} \\ &= \frac{\left(\frac{S_{xy}}{S_x^2}\right)^2 S_x^2}{S_y^2} \\ &= \frac{S_{xy}^2}{S_x^2 S_y^2} = \rho_{xy}^2. \end{aligned}$$

演習 6

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\hat{\beta}_1) &= \mathrm{V}\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right) \\ &= \frac{\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\varepsilon_i\right)}{\{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\}^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\mathrm{V}(\varepsilon_i)}{\{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\}^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}. \end{aligned}$$

演習 7 $0 < \alpha < 1$ とします．分布関数 $P(X \le x)$ が連続なとき，$P(X \le x) = 1 - \alpha$ を満たす実数 x の値は少なくともひとつ存在します．したがって，右側分位数 r_α は

$$r_\alpha = \min\{x | 1 - \alpha \le P(X \le x)\} = \min\{x | 1 - \alpha = P(X \le x)\},$$

です．$\alpha < \beta < 1$ とすると，

$$\{x | 1 - \alpha = P(X \le x)\} \cap \{x | 1 - \beta = P(X \le x)\} = \emptyset,$$

なので，$r_\alpha \neq r_\beta$ です．また，分布関数は単調非減少なので

$$\{x|1-\alpha \leq P(X \leq x)\} \subset \{x|1-\beta \leq P(X \leq x)\},$$

が成り立ち，$r_\alpha > r_\beta$ です．よって，$0.01 < 0.05 < 0.1$ より，$r_{0.1} < r_{0.05} < r_{0.01}$ が示されます．

第 *8* 章

演 習 問 題

演習 1　（略）

演習 2　（略）

演習 3　(1)

$$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = y_1^2 + \cdots + y_N^2.$$

これは未知パラメータを含まない実数です．

(2)

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1^{(1)} & \cdots & x_N^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \cdots & x_N^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \cdots + y_N \\ x_1^{(1)} y_1 + \cdots + x_N^{(1)} y_N \\ x_1^{(2)} y_1 + \cdots + x_N^{(2)} y_N \end{pmatrix}.$$

これは未知パラメータを含まない，大きさ 3 の列ベクトルです．

(3)　$u_0 = y_1 + \cdots + y_N$, $u_1 = x_1^{(1)} y_1 + \cdots + x_N^{(1)} y_N$, $u_2 = x_1^{(2)} y_1 + \cdots + x_N^{(2)} y_N$ と置くと，u_0, u_1, u_2 はそれぞれ未知パラメータを含まない実数です．また，次のように表すことができます：

$$\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2.$$

これを未知パラメータで微分すると次が得られます：

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} = u_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1}\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} = u_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta_2}\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} = u_2.$$

よって次が確認されます：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_0}\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1}\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_2}\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y}.$$

(4)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1^{(1)} & \cdots & x_N^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \cdots & x_N^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N^{(1)} & x_N^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i^{(1)} & \sum_{i=1}^N x_i^{(2)} \\ \sum_{i=1}^N x_i^{(1)} & \sum_{i=1}^N \left(x_i^{(1)}\right)^2 & \sum_{i=1}^N x_i^{(1)} x_i^{(2)} \\ \sum_{i=1}^N x_i^{(2)} & \sum_{i=1}^N x_i^{(2)} x_i^{(1)} & \sum_{i=1}^N \left(x_i^{(2)}\right)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これは未知パラメータを含まない 3×3 行列です．また次も確かめられます：

$$(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^\top = \begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i^{(1)} & \sum_{i=1}^N x_i^{(2)} \\ \sum_{i=1}^N x_i^{(1)} & \sum_{i=1}^N \left(x_i^{(1)}\right)^2 & \sum_{i=1}^N x_i^{(1)} x_i^{(2)} \\ \sum_{i=1}^N x_i^{(2)} & \sum_{i=1}^N x_i^{(2)} x_i^{(1)} & \sum_{i=1}^N \left(x_i^{(2)}\right)^2 \end{pmatrix}^\top = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}.$$

(5)　（略）

(6)　（略）

演習 4　$AC = I$ の両辺に左から B を掛けると次が得られます：

$$\begin{aligned} BAC &= BI \\ IC &= B \\ C &= B. \end{aligned}$$

$AA^{-1} = I$ の両辺の転置を考えると次が得られます：

$$\begin{aligned} (AA^{-1})^\top &= I^\top \\ (A^{-1})^\top A^\top &= I. \end{aligned}$$

よって，$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ がわかります.

演習 5

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{y}\\ &= (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e})\\ &= (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{e}\\ &= \boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{e}.\end{aligned}$$

演習 6　$b_{i,j} = [B]_{i,j}$ と置くと，$BB^\top$ は次のように表されます：

$$BB^\top = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,N}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{k+1,1} & \cdots & b_{k+1,N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{k+1,1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{1,N} & \cdots & b_{k+1,N}\end{pmatrix}.$$

したがって，$[BB^\top]_{i,j}$ が次のように表されることがわかります：

$$[BB^\top]_{i,j} = \sum_{p=1}^{N} b_{i,p}b_{j,p}.$$

ここで $i=j$ とすると，

$$[BB^\top]_{i,i} = \sum_{p=1}^{N} b_{i,p}^2 \geq 0,$$

が得られます.

演習 7　(1)

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}} &= \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ &= \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y}\\ &= (I-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{Y}\\ &= (I-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon})\\ &= (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta}+(I-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{\varepsilon}\\ &= (I-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{\varepsilon}.\end{aligned}$$

(2)

$$\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{e}}) = \mathrm{E}((I-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}.$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{e}}^\top) &= \mathrm{E}((I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{\varepsilon}\{(I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{\varepsilon}\}^\top) \\
&= \mathrm{E}((I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^\top(I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)) \\
&= (I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^\top)(I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top) \\
&= (I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)\sigma^2 I(I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top) \\
&= \sigma^2(I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)(I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top) \\
&= \sigma^2(I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top).
\end{aligned}
$$

演習 8　（略）

演習 9　大きさ N の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ は N 個の実数 $x_1, \ldots, x_N$ を並べたものです：

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}.
$$

問いにあるようにベクトルの組 $\{\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_N\}$ を定めると，これらは線形独立です．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$
\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{h}_1 + \cdots + x_N\boldsymbol{h}_N,
$$

のように線形和で表せます．また逆に，ベクトル $\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_N$ の線形和で表されるベクトルは，大きさ N の実ベクトルです．したがって，$\{\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_N\}$ は $\mathbb{R}^N$ の基底です．この基底は，N 個のベクトルを含んでいるので，この空間 $\mathbb{R}^N$ の次元は N です．

演習 10　(1)　ベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ が線形独立であるので，これらのどれも $\boldsymbol{0}$ ではありません．$\boldsymbol{u}_1 = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$ と表したときに，$c_1 = \cdots = c_m = 0$ とすると $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$ となってしまうので矛盾します．したがって，$c_1, \ldots, c_m$ のうち少なくともひとつは 0 ではありません．

$c_1 \neq 0$ とします．ベクトル空間 $\mathscr{M}$ の要素は，実数 $x_1, \ldots, x_m$ を使って，

$$
\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m,
$$

のように表されます．$c_1 \neq 0$ のとき

$$
\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{c_1}\boldsymbol{u}_1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \frac{c_m}{c_1}\boldsymbol{v}_m\right),
$$

を代入すると,

$$\boldsymbol{x} = \frac{x_1}{c_1}\boldsymbol{u} + \left(x_2 - \frac{x_1 c_2}{c_1}\right)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \left(x_m - \frac{x_1 c_m}{c_1}\right)\boldsymbol{v}_m,$$

と表されます. $\mathscr{M}$ の要素はこのようにベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ の線形和で表されます.

また, 線形和

$$d_1\boldsymbol{u}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mathrm{d}_m\boldsymbol{v}_m,$$

の値が $\mathbf{0}$ になる場合を考えます. この線形和は次のように表されます：

$$d_1c_1\boldsymbol{v}_1 + (d_1c_2 + d_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (d_1c_m + d_m)\boldsymbol{v}_m.$$

ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ はベクトル空間 $\mathscr{M}$ の基底なので, 線形独立です. したがって, この線形和が $\mathbf{0}$ になるのはすべての係数が 0 の場合のみです. $d_1c_1 = 0$ が必要ですが, $c_1 \neq 0$ なので, $d_1 = 0$ です. これを代入すると, $d_2 = \cdots = d_m = 0$ が必要なことがわかります. よって, 上の線形和が $\mathbf{0}$ となるのはすべての係数が 0 の場合のみです. よって, ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は線形独立です.

以上より, 組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ はベクトル空間 $\mathscr{M}$ の基底です.

(2) $c_{k+1} = \cdots c_m$ と仮定します. このとき次が成り立ちます：

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{u}_i.$$

これは, ベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が線形独立であることと矛盾します.

よって, $c_{k+1}, \ldots, c_m$ のうち少なくともひとつは 0 ではありません.

$c_{k+1} \neq 0$ とします. ベクトル空間 $\mathscr{M}$ の要素は, 基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ と実数 $x_1, \ldots, x_m$ をつかって,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{i=k+1}^{m} x_i\boldsymbol{v}_i,$$

と表されます. $c_{k+1} \neq 0$ のとき

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}}\boldsymbol{u}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{c_{k+1}}\boldsymbol{u}_i - \sum_{i=k+2}^{m} \frac{c_i}{c_{k+1}}\boldsymbol{v}_i,$$

を代入すると,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \frac{c_i x_{k+1}}{c_{k+1}} \right) \boldsymbol{u}_i + \frac{x_{k+1}}{c_{k+1}} \boldsymbol{u}_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{m} \left(x_i - \frac{x_{k+1}}{c_{k+1}} \right) \boldsymbol{v}_i,$$

と表されます．したがって, $\mathscr{M}$ の要素はベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の線形和で表せます．また, これらの組が線形独立であることは問 (1) と同じようにして示すことができます．よって，組 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ はベクトル空間 $\mathscr{M}$ の基底です.

(3)　$n = m$ のとき, 問 (2) の手順を $k = m-1$ に当てはめると, 組 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ がベクトル空間 $\mathscr{M}$ の基底であることが示されます.

たとえば，組 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{m+1}\}$ を考えます．$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ は $\mathscr{M}$ の基底なので，$\boldsymbol{u}_{m+1} \in \mathscr{M}$ であれば，$\boldsymbol{u}_{m+1} = c_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m \boldsymbol{u}_m$ のように線形和で表せるはずです．つまり，組 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{m+1}\}$ は線形独立ではありません．組が線形独立になるには $n \leq m$ が必要です.

演習 11　(1)　$1/\sqrt{\boldsymbol{x}^{(0)\top} \boldsymbol{x}^{(0)}}$ は実数なので，$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}^{(0)}/\sqrt{\boldsymbol{x}^{(0)\top} \boldsymbol{x}^{(0)}}$ は基底に含まれるベクトル $\boldsymbol{x}^{(0)}$ の線形和と考えることができます．したがって，$\boldsymbol{u}_0 \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{X}}$ です．また，次が成り立ちます：

$$\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}^{(0)\top}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{(0)\top} \boldsymbol{x}^{(0)}}} \frac{\boldsymbol{x}^{(0)}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{(0)\top} \boldsymbol{x}^{(0)}}} = 1.$$

(2)　$\boldsymbol{u}_1$ は規程に含まれるベクトル $\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}$ の線形和と考えることができるので，$\boldsymbol{u}_1 \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{X}}$ です．また次が成り立ちます：

$$\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right) \boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{u}_0}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{(1)\top} \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right)^2}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1^\top \boldsymbol{u}_1 &= \frac{\left\{ \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right) \boldsymbol{u}_0 \right\}^\top}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{(1)\top} \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right)^2}} \frac{\boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right) \boldsymbol{u}_0}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{(1)\top} \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right)^2}} \\ &= \frac{\boldsymbol{x}^{(1)\top} \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right) \boldsymbol{x}^{(1)\top} \boldsymbol{u}_0 - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right) \boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} + \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right)^2 \boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{u}_0}{\boldsymbol{x}^{(1)\top} \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right)^2} \\ &= \frac{\boldsymbol{x}^{(1)\top} \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right)^2}{\boldsymbol{x}^{(1)\top} \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{x}^{(1)} \right)^2} = 1. \end{aligned}$$

(3)　自然数 i が $1 \leq i \leq j$ を満たすとします．このとき次が得られます：

$$\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_{j+1} = \frac{\boldsymbol{u}_i^\top \left(I - U_j U_j^\top \right) \boldsymbol{x}^{(j+1)}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \boldsymbol{x}^{(j+1)} - \boldsymbol{x}^{(j+1)\top} U_j U_j^\top \boldsymbol{x}^{(j+1)}}}$$

$$= \frac{\left(\boldsymbol{u}_i^\top - \boldsymbol{u}_i^\top U_j U_j^\top\right) \boldsymbol{x}^{(j+1)}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \boldsymbol{x}^{(j+1)} - \boldsymbol{x}^{(j+1)\top} U_j U_j^\top \boldsymbol{x}^{(j+1)}}}.$$

ここで，$U_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{i-1} & \boldsymbol{u}_i & \boldsymbol{u}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{u}_j \end{pmatrix}$ なので，分子の $\boldsymbol{u}_i^\top U_j U_j^\top$ は次のように計算されます：

$$\boldsymbol{u}_i^\top U_j U_j^\top = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_{i-1} & \boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_i & \boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{i-1}^\top \\ \boldsymbol{u}_i^\top \\ \boldsymbol{u}_{i+1}^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_j^\top \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{i-1}^\top \\ \boldsymbol{u}_i^\top \\ \boldsymbol{u}_{i+1}^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_j^\top \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_i^\top.$$

したがって，次が得られます：

$$\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_{j+1} = \frac{\left(\boldsymbol{u}_i^\top - \boldsymbol{u}_i^\top\right) \boldsymbol{x}^{(j+1)}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \boldsymbol{x}^{(j+1)} - \boldsymbol{x}^{(j+1)\top} U_j U_j^\top \boldsymbol{x}^{(j+1)}}} = 0.$$

また，次のように計算されます：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{j+1}^\top \boldsymbol{u}_{j+1} &= \frac{\left\{\left(I - U_j U_j^\top\right) \boldsymbol{x}^{(j+1)}\right\}^\top \left(I - U_j U_j^\top\right) \boldsymbol{x}^{(j+1)}}{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \boldsymbol{x}^{(j+1)} - \boldsymbol{x}^{(j+1)\top} U_j U_j^\top \boldsymbol{x}^{(j+1)}} \\
&= \frac{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \left(I - U_j U_j^\top\right) \left(I - U_j U_j^\top\right) \boldsymbol{x}^{(j+1)}}{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \boldsymbol{x}^{(j+1)} - \boldsymbol{x}^{(j+1)\top} U_j U_j^\top \boldsymbol{x}^{(j+1)}} \\
&= \frac{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \left(I - 2U_j U_j^\top - U_j U_j^\top U_j U_j^\top\right) \boldsymbol{x}^{(j+1)}}{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \boldsymbol{x}^{(j+1)} - \boldsymbol{x}^{(j+1)\top} U_j U_j^\top \boldsymbol{x}^{(j+1)}} \\
&= \frac{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \left(I - U_j U_j^\top\right) \boldsymbol{x}^{(j+1)}}{\boldsymbol{x}^{(j+1)\top} \boldsymbol{x}^{(j+1)} - \boldsymbol{x}^{(j+1)\top} U_j U_j^\top \boldsymbol{x}^{(j+1)}} = 1.
\end{aligned}$$

もし，$\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{j+1}\}$ が線形独立なのに，$\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{j+1}, \boldsymbol{x}^{(j+2)}\}$ が線形独立でないとすると，ある実数列 $c_0, \ldots, c_{j+1}$ を使うと

$$\boldsymbol{x}^{(j+2)} = c_0\boldsymbol{u}_0 + \cdots + c_{j+1}\boldsymbol{u}_{j+1},$$

が成り立つことになります．$\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{j+1}$ はどれも，$\boldsymbol{x}_0, \ldots, \boldsymbol{x}_{j+1}$ の線形和で表せるので，$\boldsymbol{x}^{(j+2)}$ が $\boldsymbol{x}^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(j+1)}$ の線形和で表せることになってしまいます．これは，$\{\boldsymbol{x}^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}\}$ が線形独立であるという仮定と矛盾します．したがって，$\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{j+1}, \boldsymbol{x}^{(j+2)}\}$ は線形独立です．

演習 12　（略）

演習 13　（略）

演習 14　(1)　$\boldsymbol{X} = UB$ を使うと次のように計算されます：

$$\begin{aligned}
P_{\boldsymbol{X}}^{\perp}U &= (I - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top)U \\
&= U - UB\{(UB)^\top UB\}^{-1}(UB)^\top U \\
&= U - UB(B^\top U^\top UB)^{-1}B^\top U^\top U \\
&= U - UB(B^\top B)^{-1}B^\top \\
&= U - UBB^{-1}(B^\top)^{-1}B^\top \\
&= U - U = O.
\end{aligned}$$

(2)

$$P_{\boldsymbol{X}}^{\perp}V = (I - UU^\top)V = V - UU^\top V = V - O = O.$$

(3)

$$\begin{aligned}
Q^\top P_{\boldsymbol{X}}^{\perp}Q &= \begin{pmatrix} U^\top \\ V^\top \end{pmatrix} P_{\boldsymbol{X}}^{\perp} \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U^\top \\ V^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\boldsymbol{X}}^{\perp}U & P_{\boldsymbol{X}}^{\perp}V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U^\top \\ V^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U^\top O & U^\top V \\ V^\top O & V^\top V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
QQ^\top P_{\boldsymbol{X}}^\perp QQ^\top &= Q\begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} Q^\top \\
QQ^{-1} P_{\boldsymbol{X}}^\perp QQ^{-1} &= \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^\top \\ V^\top \end{pmatrix} \\
P_{\boldsymbol{X}}^\perp &= \begin{pmatrix} O & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^\top \\ V^\top \end{pmatrix} \\
P_{\boldsymbol{X}}^\perp &= VV^\top .
\end{aligned}
$$

演習 15

$$
\begin{aligned}
P_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{c} &= UU^\top \boldsymbol{c} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_0 & \cdots & \boldsymbol{u}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_0^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_k^\top \end{pmatrix}\boldsymbol{c} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_0 & \cdots & \boldsymbol{u}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_0^\top\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_k^\top\boldsymbol{c} \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{u}_0 \times (\boldsymbol{u}_0^\top\boldsymbol{c}) + \cdots + \boldsymbol{u}_k \times (\boldsymbol{u}_k^\top\boldsymbol{c}).
\end{aligned}
$$

このように，$\mathscr{M}_{\boldsymbol{X}}$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ に含まれるベクトルの線形和で表されるので，$P_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{c} \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{X}}$ です．
$P_{\boldsymbol{X}}^\perp\boldsymbol{c}$ についても同じように示されます．

第 *9* 章

演 習 問 題

演習 1　(1)

$$
\mathrm{E}(D_i^{(\mathrm{Y})}) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p.
$$

(2)

$$
\mathrm{V}(D_i^{(\mathrm{Y})}) = \mathrm{E}\left(\left(D_i^{(\mathrm{Y})}\right)^2\right) - \left(\mathrm{E}\left(D_i^{(\mathrm{Y})}\right)\right)^2
$$

$$= 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2$$
$$= p(1-p).$$

(3)

$$\mathrm{E}\left(C^{(\mathrm{Y})}\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N^{(\mathrm{Y})}} D_i^{(\mathrm{Y})}\right) = N^{(\mathrm{Y})}p,$$
$$\mathrm{V}\left(C^{(\mathrm{Y})}\right) = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{N^{(\mathrm{Y})}} D_i^{(\mathrm{Y})}\right) = N^{(\mathrm{Y})}p(1-p).$$

演習 2　（略）