

第2章 略解

以下，証明問題など数理的な問題を中心に略解を与える．Excel 計算のみの問題や平易な問題の解答は省略する．

2.2 問題 2.2 の略解

2 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - n \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0$ であるから示された．

逆に $\sum_{i=1}^n (x_i - c) = 0$ を満たす c は， $c = \bar{x}$ である．何故なら， $\sum_{i=1}^n (x_i - c) = 0$ は $\sum_{i=1}^n x_i - nc = 0$ に等しく，これを c について解くと， $c = \bar{x}$ となるからである．

3 データの総和は $\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i = n\bar{x} + m\bar{y}$ ．データ数は $n + m$ であるから，その平均は $(n\bar{x} + m\bar{y}) / (n + m)$ ．

4 全ての i に対して，

$$x_{(1)} \leq x_i \leq x_{(n)}$$

が成り立つから，これらの総和を取れば， $nx_{(1)} \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq nx_{(n)}$ が得られ，全ての辺を n で割れば求めるものが得られる．

5 総和は (n 人中の) 自宅通学生の総数，平均は (n 人中の) 自宅通学生の比率．

- 6 y_1, \dots, y_n を昇順に並べると $ax_{(1)} + b \leq ax_{(2)} + b \leq \dots \leq ax_{(n)} + b$ となるから, n が奇数のときは, $y_{(\frac{n+1}{2})} = ax_{(\frac{n+1}{2})} + b = aMd + b$ となる. n が偶数のときも同様に考えればよい.
- 7 (1) は略す. (2) は微分法によって示す. やや高度であるため一般的な証明は他書に譲る. 例えば『不等式への招待』大関信雄・大関清太著 (近代科学社) の第2部の1に様々な証明が紹介されている. (3) は $G \leq \bar{x}$ の両辺の対数を取ることによって得られる.

2.3 問題2.3の略解

- 3 問題2.2の2で示した等式 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2 &= \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - A)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - A) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - A)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - A)^2 \end{aligned}$$

が示される. 後は両辺を n で割ればよい.

- 4 $(x_i - \bar{x})^2$ を展開して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2. \end{aligned}$$

5 $x_i - x_j = (x_i - \bar{x}) - (x_j - \bar{x})$ であるから,

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(x_i - \bar{x}) - (x_j - \bar{x})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \times \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) + n \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \\ &= 2n^2 S^2 \end{aligned}$$

6 $x_i^2 = x_i$ が成り立つから, 問題 2.3 の 4 の等式を用いて,

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^2 = \bar{x} - \bar{x}^2 = \bar{x}(1 - \bar{x}).$$

データの平均は 0.75, 分散は 0.1875.

2.4 問題 2.4 の略解

3 定理 2.2 と 2.3 より, $y_i = ax_i + b$ の平均と分散はそれぞれ $\bar{y} = a\bar{x} + b$ と $S_y^2 = a^2 S_x^2$ であるから, 基準化変量は

$$\frac{y_i - \bar{y}}{S_y} = \frac{(ax_i + b) - (a\bar{x} + b)}{aS_x} = \frac{a(x_i - \bar{x})}{aS_x} = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}$$

となる. これは x_i の基準化変量に等しい.

- 4 定理 2.4 より, 基準化変量 z の平均と分散はそれぞれ $\bar{z} = 0$ と $S_z^2 = 1$ である. 偏差値は基準化変量を 1 次変換したものであるから, 定理 2.2 より, 偏差値の平均は $50 + 10\bar{z} = 50$ と求められる. また, 定理 2.3 より, 分散は $10^2 S_z^2 = 100$, 標準偏差は $10S_z = 10$ と求められる.
- 5 $\bar{x} = 1/(m+1)$, $S^2 = m/(m+1)^2$ であるから, 例えば, 1 というデータの基準化変量は,

$$\frac{1 - \frac{1}{m+1}}{\frac{\sqrt{m}}{m+1}} = \sqrt{m}.$$

よって, m が大きくなるに従って基準化変量は幾らでも大となる (∞ に発散する). 同様に, 0 の基準化変量は $-1/\sqrt{m}$ となるから, m が大きくなるに従って 0 に収束する.

問題 2.5 は計算問題であるから省略する.

2.6 問題 2.6 の略解

- 1 (1) 後半のみ示す. 求める必要十分条件は, (x, y) が, 2 点 $(0.9, 0.1)$ と $(0.1, 0.9)$ を結ぶ線分上に存在することである. (2) 後半のみ示す. 求める必要十分条件は, (x, y, z) が, 3 点 $(0.8, 0.1, 0.1)$, $(0.1, 0.8, 0.1)$, $(0.1, 0.1, 0.8)$ を結んで得られる 3 角形の内部に存在することである.
- 3 分配 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ のローレンツ曲線を $(r_1, I_1), (r_2, I_2), \dots, (r_n, I_n)$ とおく. 記号の定義は 57 頁の通りである. 分配 $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ のローレンツ曲線を $(r_1, I'_1), (r_2, I'_2), \dots, (r_n, I'_n)$ とおく. r_i の値は共通である. また, $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x'_i = S$ である. \mathbf{x} のローレンツ曲線が \mathbf{x}' のそれよりも下方にあるとは,

$$I_k \leq I'_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つことである。これは

$$\frac{x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(k)}}{S} \leq \frac{x'_{(1)} + x'_{(2)} + \cdots + x'_{(k)}}{S} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

に等しく、分母を払えば、

$$x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(k)} \leq x'_{(1)} + x'_{(2)} + \cdots + x'_{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

と同値である。従って $x \succeq x'$ と同値である。

2.7 問題 2.7 の略解

2 (1) 次式の通り。

$$\begin{aligned} G &= [x_0^T (1+r)^{1+2+\cdots+T}]^{1/T} \\ &= [x_0^T (1+r)^{T(T+1)/2}]^{1/T} \\ &= x_0 (1+r)^{(T+1)/2} \end{aligned}$$

(2) 次式の通り。

$$\begin{aligned} G &= [x_0^T e^{r(1+2+\cdots+T)}]^{1/T} \\ &= [x_0^T e^{rT(T+1)/2}]^{1/T} \\ &= x_0 e^{r(T+1)/2} \end{aligned}$$

第3章 略解

3.2 問題3.2の略解

3 z の平均は $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ であるから, z の分散は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i + y_i) - (\bar{x} + \bar{y})]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y})]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2 \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= S_x^2 + 2S_{xy} + S_y^2 \end{aligned}$$

4 $x_i^* = (x_i - \bar{x})/S_x$, $y_i^* = (y_i - \bar{y})/S_y$ と置くと, これらはそれぞれ x_i と y_i の標準化変量であるから, $\bar{x}^* = 0$ かつ $\bar{y}^* = 0$ である (定理 2.4). 従って, x_i^* と y_i^* の共分散は, 注 3.1 より

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^* y_i^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_y} \right)$$

となり, これは x と y の相関係数に等しい (3.2.5 式).

5 標準化変量は 1 次変換の下で不変である. 上で見た通り, 相関係数は標準化変量の共分散であるから, 1 次変換の下で不変である.

3.3 第3.3の略解

- 3 (1) $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}x_i)^2$ は $\hat{\beta}$ の 2 次関数である . 何故なら , $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}x_i)^2 = \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2$ であるから , $A = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $C = \sum_{i=1}^n y_i^2$ とおけば ,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}x_i)^2 = A\hat{\beta}^2 - 2B\hat{\beta} + C$$

と表せるからである . 上式は平方完成により ,

$$\text{上式} = A(\hat{\beta} - B/A)^2 + C - B^2/A$$

と変形出来るから , $\hat{\beta} = B/A = \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sum_{i=1}^n x_i^2$ で最小となる .

- (2) 証明は計算 . A と B の定義を上と同様とすると ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \hat{\epsilon}_i &= \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\beta}x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= B - \frac{B}{A} \times A \\ &= B - B \\ &= 0. \end{aligned}$$

- 5 $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ が成り立つから , これを整理すれば , $\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$ が得られる . 即ち , (\bar{x}, \bar{y}) は常に回帰直線上にある .

3.4 第3.4節の略解

- 3 証明のアウトラインを述べる . 回帰モデル $x_i = \alpha + \beta z_i + u_i$ を推定したときの残差を \hat{u}_i と置くと , $\hat{u}_i = (x_i - \bar{x}) - \hat{\beta}(z_i - \bar{z})$ である (この表

し方は定理 3.4 の証明の中で導いている) . このとき ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = (1 - r_{xz}^2) \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (1 - r_{xz}^2) S_x^2$$

が成り立つ . 同様に , 回帰モデル $y_i = \gamma + \delta z_i + v_i$ を推定したときの残差を \hat{v}_i と置くと , $\hat{v}_i = (y_i - \bar{y}) - \hat{\delta}(z_i - \bar{z})$ であり ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^2 = (1 - r_{yz}^2) S_y^2$$

が成り立つ . これらを用いて , 残差同士の共分散を求める . 残差の平均はゼロであるから , 注 3.1 より , 共分散は $(1/n) \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \hat{v}_i$ と書ける . ここで , $\hat{\beta} = S_{xz}/S_z^2$, $\hat{\delta} = S_{yz}/S_z^2$ を利用すると ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \hat{v}_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) - \hat{\beta}(z_i - \bar{z})][(y_i - \bar{y}) - \hat{\delta}(z_i - \bar{z})] \\ &= S_{xy} - \frac{S_{xz} S_{yz}}{S_z^2} \end{aligned}$$

であるから , 残差 \hat{u}_i と \hat{v}_i の相関係数は ,

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \hat{v}_i}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^2}} = \frac{S_{xy} - \frac{S_{xz} S_{yz}}{S_z^2}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2) S_x^2} \sqrt{(1 - r_{yz}^2) S_y^2}}$$

となり , これを整理すれば求めるものが得られる .

第4章 略解

4.1 問題4.1の略解

1 Aの勝ちを1, Bの勝ちを-1, あいこを0で表す.

(1) 標本空間を Ω で表す.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i, j, k) \mid i, j, k = -1, 0, 1\} \\ &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, -1), \\ &\quad (1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, -1), \\ &\quad (1, -1, 1), (1, -1, 0), (1, -1, -1), \\ &\quad (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 1, -1), \\ &\quad (0, 0, 1), (0, 0, 0), (0, 0, -1), \\ &\quad (0, -1, 1), (0, -1, 0), (0, -1, -1), \\ &\quad (-1, 1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 1, -1), \\ &\quad (-1, 0, 1), (-1, 0, 0), (-1, 0, -1), \\ &\quad (-1, -1, 1), (-1, -1, 0), (-1, -1, -1)\}\end{aligned}$$

(2) Aが2回勝つ事象は, 1が2つ含まれる事象であるから,

$$\{(1, 1, 0), (1, 1, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 1)\}$$

(3) 引き分けが2回以上の事象は、0が2つ以上含まれる事象であるから、

$$\{(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1), (0, 0, 0)\}$$

(4) Bが続けて2回以上勝つ事象は、

$$\{(1, -1, -1), (0, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, 0), (-1, -1, -1)\}$$

(5) AとBが1回ずつ勝つ事象は、

$$\{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, -1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

2. (1) $A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{20 \text{ 歳以上}\}$, $(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap B_1 = \{20 \text{ 歳以上の男性}\}$

(2) $A_1 \cap B_2 = \{20 \text{ 歳未満の女性}\}$, $A_2 \cap B_1 = \{20 \text{ 歳以上 40 歳未満の男性}\}$

(3) 前者の事象は{20歳未満の女性であるかまたは20歳以上40歳未満の女性}であり、後者の事象は{40歳未満の女性}であり、どちらも{40歳未満の女性}に等しい。

3 (1) 求める事象は

$$\begin{aligned} & \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq 6\} \\ & = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ & \quad (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\} \end{aligned}$$

(2) 求める事象は

$$\{(i, j) \mid |i-j| = 1\} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

(3) 求める事象は

$$\{(i, i) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

(4) 求める事象は

$$\begin{aligned} & \{(i, j) \mid |i - j| \geq 3\} \\ & = \{(1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3)\} \end{aligned}$$

4.2 問題 4.2 の略解

1 確率の条件 (P3) から (P3*) を導く .

(P3) が成り立つとする . このとき , $A_1 = A$, $A_2 = B$ とし , $A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$ と置くと , A_1, A_2, \dots は全て互いに排反である . したがって , (P3) より ,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

が成り立つ . ここで , $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots = A \cup B$ であるから , 左辺は $P(A \cup B)$ に等しい . 他方 , (P2) より $P(\emptyset) = 0$ であるから , 右辺は $P(A) + P(B)$ に等しい . よって (P3*) が示された . すなわち ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

が示された .

(P3*) と (P3**) が同値であることを示す . まず , (P3*) から (P3**) を導く . A_1, A_2, \dots, A_n は互いに排反であるとする . このとき , $A = A_1$, $B = A_2 \cup \dots \cup A_n$ と置けば , A と B は排反となるから , (P3*) より ,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \cup \dots \cup A_n) \end{aligned}$$

が得られる．同じやり方で，右辺の第2項が， $P(A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_2) + P(A_3 \cup \dots \cup A_n)$ と書けることが示せる．このプロセスを続けることにより， $(P3^{**})$ が得られる．

次に， $(P3^{**})$ から $(P3^*)$ を導けることは明らかである．よって $(P3^*)$ と $(P3^{**})$ が同値であることが示された．

2 (1)

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

(2) $P(B) = 11/36$ と $P(A \cap B) = 5/36$ より， $P(A|B) = \frac{5/36}{11/36} = 5/11$.

(3) 同様に $P(A|C) = 1/2$.

3 本ページ下に記載

4 ヒントのみ．(1) $0.8^2 \times 0.2$, (2) $1 - 0.8^{10}$, (3) $(1 - 0.8^5)/(1 - 0.8^{10})$,

(4) $0.8^2[0.2 + 0.8 \times 0.2 + 0.8^2 \times 0.2 + \dots]$

5 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ の両辺を $P(B)$ で割ることにより， $P(A|B) = P(A)$ を得る．逆に， $P(A|B) = P(A)$ の両辺に $P(B)$ を掛けることにより， $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を得る．

6 (4.2.23) が成り立つときに， A と B が独立であることを示す (逆は各自で)

$$\begin{aligned} (4.2.23) &\Rightarrow P(A \cap B)P(B^c) = P(A \cap B^c)P(B) \\ &\Rightarrow P(A \cap B)[1 - P(B)] = P(A \cap B^c)P(B) \\ &\Rightarrow P(A \cap B) = [P(A \cap B) + P(A \cap B^c)]P(B) \\ &\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{aligned}$$

3. 標本空間は $2^5=32$ 個の標本点からなる集合であり、男=1, 女=0 と書き、生まれた順に $(1,1,0,0,1)$ などと書くことにすると、

$\Omega = \{(0,0,0,0,0), (0,0,0,0,1), (0,0,0,1,0), (0,0,0,1,1), (0,0,1,0,0), (0,0,1,0,1), (0,0,1,1,1), \dots, (1,1,1,1,1)\}$ と書ける。これらは全て等しい確率(=1/32)で生じる。

(1) {上2人が男で下3人が女}= $\{(1,1,0,0,0)\}$ であり、1つの標本点からなる事象であるから、確率は1/32。

(2) {男3人で女2人}= $\{(0,0,1,1,1), (0,1,0,1,1), (0,1,1,0,1), (0,1,1,1,0), (1,0,0,1,1), (1,0,1,0,1), (1,0,1,1,0), (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,0), (1,1,1,0,0)\}$ であり、10個の標本点からなる事象であるから、確率は $10/32=5/16$ 。

(3) {5人が同性}= $\{(0,0,0,0,0), (1,1,1,1,1)\}$ であるから、確率は $2/32=1/16$ 。

7 A と B は独立とする．すなわち， $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つとする．このとき，

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)\{1 - P(B)\} \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

であるから， A と B^c は独立である．

8 (1) 公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ において， $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を使うと $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ が成り立ち， $P(B)$ について整理すれば，

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{0.6 - 0.4}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

(2) 公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ を使うと， $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.6 - 0.4 = 0.2$.

(3) $0.2 = P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ より， $P(A \cap B) = 0.2 \times P(A) = 0.08$. したがって，公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ を $P(B)$ について解いて，

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.6 - 0.4 + 0.08 = 0.28.$$

9 袋 A ， B ， C を選ぶという事象をそれぞれ A ， B ， C で表すと，袋の選び方は無作為であるから，

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

である．また，白球を取り出すという事象を W ，赤球を取り出すという事象を R で表すと，

$$P(W|A) = 3/10, P(R|A) = 7/10,$$

$$P(W|B) = 5/10, P(R|B) = 5/10,$$

$$P(W|C) = 7/10, P(R|C) = 3/10$$

である．求める確率は $P(A|W)$ であるから，ベイズの定理より，

$$\begin{aligned} P(A|W) &= \frac{P(W|A)P(A)}{P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

10 (1) $P(A) = 1/4, P(B|A) = 1, P(B|A^c) = 1/3$.

(2) $P(A|B)$ を求める．ベイズの定理より，

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{1 \times \frac{1}{4}}{1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) 上問において， $P(A) = 1/100, P(B|A) = 1, P(B|A^c) = 1/100$ とすればよい． $P(A|B) = 100/199$ ．

11 ウイルスに感染しているという事象を A で表し，陽性と判定されるという事象を B で表すと，題意より， $P(A) = 0.0004, P(B|A) = 0.998$ ，

$P(B|A^c) = 0.002$ である . 求める確率は $P(A|B)$ であるから , ベイズの定理より ,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{0.998 \times 0.0004}{0.998 \times 0.0004 + 0.002 \times 0.9996} \\ &= 0.166 \end{aligned}$$

4.3 問題 4.3 の略解

1 和の計算は第 1.3 節の公式を用いる .

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N x = \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

同様に ,

$$E(X^2) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N x^2 = \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}.$$

また , 定理 4.8 の公式 $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ より ,

$$V(X) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{(N+1)(N-1)}{12}.$$

2 (1) $E(X) = 100 \times 0.5 + 500 \times 0.5 = 300$ (万円) , $E(Y) = 100 \times p + 200 \times p + 300 \times (1-4p) + 400 \times p + 500 \times p = 300$ (万円) . したがって , 期待値の意味では同等である . (2) $E(X^2) = 100^2 \times 0.5 + 500^2 \times 0.5 = 130000$ であるから , $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ より ,

$$V(X) = 130000 - 300^2 = 40000.$$

同様に, $V(Y) = 100000p$. 条件より, $0 \leq p \leq 1/4$ なので, $V(Y) \leq V(X)$ である. したがって, X の方が分散が大きく, ハイリスクである.

3 Y の分布を求める. Y の値域は $\{0, 1, 4, 9\}$ であり,

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0.2,$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.4,$$

$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0.2,$$

$$P(Y = 9) = P(X = -3) + P(X = 3) = 0.2$$

であるから,

$$E(Y) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.4 + 4 \times 0.2 + 9 \times 0.2 = 3.$$

同様にして, $E(Y^2) = 19.8$ だから, $V(Y) = 19.8 - 3^2 = 10.8$.

4 本ページ下部に記載

5 $V(X) = 13 - 3^2 = 4$ であるから, $D(X) = 2$ である. $\mu = 3, \sigma = 2$ とおけば $-2 \leq X \leq 8$ は $\mu - 2.5\sigma \leq X \leq \mu + 2.5\sigma$ と書けるので, チェビシェフの不等式より,

$$P(\mu - 2.5\sigma \leq X \leq \mu + 2.5\sigma) \geq 1 - \frac{1}{(2.5)^2} = 0.84.$$

4. 逆のみ示す. X は x_1, \dots, x_N をそれぞれ確率 p_1, \dots, p_N で取るものとする. $E(X) = \mu$, $V(X) = 0$ とする. このとき, $V(X) = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 p_i = 0$ である. 和の各項は 0 以上であるから, この式が成り立つためにはすべての項が 0 でなければならない. したがって $P(X = \mu) = 1$ となる.

4.4 問題 4.4 の略解

1 X の分布は 2 項分布 $B(10, 0.3)$. Excel 計算は略す.

2 (1) のみ . m を固定し , $P(X \leq m) = \sum_{x=0}^m {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x}$ を p の関数とみて $g(p)$ と置く . 各 m に対して , $g(p)' \leq 0$ が成立することを示せばよい .

まず , $m = n$ のときは , $P(X \leq n) = 1$ であるから , $g(p)$ は恒等的に 1 である . 従ってこのときは $g'(p) = 0$ が成り立つ .

簡単な計算により ,

$$\begin{aligned} g'(p) &= \sum_{x=0}^m {}_n C_x [p^x (1-p)^{n-x}]' \\ &= \sum_{x=0}^m [x - np] {}_n C_x p^{x-1} (1-p)^{n-x-1} \\ &= \sum_{x=0}^m [x - np] Q_x \quad \text{但し , } Q_x = {}_n C_x p^{x-1} (1-p)^{n-x-1} \end{aligned}$$

ここで , p や x の値に関わらず , $Q_x \geq 0$ であることに注意する . 整数 ℓ を $\ell \leq np < \ell + 1$ なるものとする . このとき ,

$$g'(p) = \sum_{x=0}^{\ell} [x - np] Q_x + \sum_{x=\ell+1}^m [x - np] Q_x$$

であるから , 第 1 項 ≤ 0 , 第 2 項 ≥ 0 が成立する . 従って , $m \leq \ell$ なるときは (第 2 項がないから) $g'(p) \leq 0$ である . 次に , $m \geq \ell + 1$ のときを考える . $g'(p) \leq 0$ は ,

$$\sum_{x=\ell+1}^m [x - np] Q_x \leq - \sum_{x=0}^{\ell} [x - np] Q_x$$

に等しいので (両辺とも非負であることに注意) , 上式を示せばよい . 左辺の各項は非負であるから , $m = n$ のときを示せば十分である . 即ち ,

$$\sum_{x=\ell+1}^n [x - np] Q_x \leq - \sum_{x=0}^{\ell} [x - np] Q_x$$

を示せばよい．そしてこれは明らかである．何故なら， $m = n$ のときは（上で述べた通り） $g'(p) = 0$ であり，それは $\sum_{x=\ell+1}^n [x - np]Q_x = -\sum_{x=0}^{\ell} [x - np]Q_x$ を意味するからである（証明終）

1 つ便利な等式があり，それを經由して示すことも出来る．

$$P(X \geq r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^p x^{r-1}(1-x)^{n-r} dx \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

なる等式は確率計算の際にしばしば利用される．ここで右辺を見ると， p は積分範囲にしか現れず，しかも被積分関数は非負であるから，右辺は p の増加関数である．従って， $m = r - 1$ とし， $P(X \leq m)$ は p の減少関数である．

3 $X \sim B(n, p)$ とする． $Y = y$ は $n - X = y$ に等しく，したがって $X = n - y$ に等しい．よって

$$P(Y = y) = P(X = n - y) = {}_n C_{n-y} p^{n-y} (1-p)^{n-(n-y)} \quad (y = 0, 1, \dots, n).$$

ここで， $q = 1 - p$ とおき， ${}_n C_{n-y} = {}_n C_y$ に注意すると，上式は

$$P(Y = y) = {}_n C_y q^y (1-q)^{n-y} \quad (y = 0, 1, \dots, n)$$

と表せる．これは， $Y \sim B(n, q)$ であることを表している．

4 $np = 10$ ， $np(1-p) = 6$ を n, p について解けばよい． $p = 0.4$ ， $n = 25$ が得られる．従って，求める分布は $B(25, 0.4)$ ．

6 $1000 \times 0.002 = 2$ であるから，求める分布は $Po(2)$ ．Excel 計算は省略．

7 $P(B) = {}_5 C_3 p^3 (1-p)^2$ ．他方， $A \cap B = \{1 \text{ 回目は表, 残る 4 回のうち 2 回表が出る}\}$ であるから， $P(A) = p \times {}_4 C_2 p^2 (1-p)^2$ ．したがって，

$$P(A|B) = \frac{p \times {}_4 C_2 p^2 (1-p)^2}{{}_5 C_3 p^3 (1-p)^2} = \frac{{}_4 C_2}{{}_5 C_3} = \frac{3}{5}.$$

5. $P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$ ， $P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda}$ であるから， $e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}$ を満たす λ

を求めればよく，それは $\lambda = 1$ 。

8. $X \sim Ge(0.4)$ であるから，定理 4.16 より $P(X \leq 3) = 1 - P(X > 4) = 1 - 0.6^4 \approx 0.87$ ．

9. $30000 \times 0.0001 = 3$ であるから，保険金の支払い請求者数を X とすると $X \sim Po(3)$ ．よって、

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left\{ \frac{e^{-3} 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} 3^1}{1!} \right\} = 1 - 4e^{-3}$$

例えば、 $e=2.7$ で評価すると、 $P(X \geq 2) \approx 0.707$ ．

10 $P(X = a + b | X > b) = P(X = a)$ において, $b = 1$ と置くと, $P(X = a + 1 | X > 1) = P(X = a)$ ($a = 1, 2, \dots$) が得られる. 条件付確率の定義より, $P(X = a + 1) = P(X = a)P(X > 1)$ が得られるから, 数列 $P(X = 1), P(X = 2), \dots$ は初項 $p = P(X = 1)$, 公比 $P(X > 1) = 1 - p$ の幾何数列である. よって, $P(X = a) = p(1 - p)^{a-1}$ ($a = 1, 2, \dots$) となる.

12 定理 4.11 と基本的に同様である. {最初の n_1 回は C_1 が生じ, 次の n_2 回は C_2 が生じ, \dots , 最後の n_k 回は C_k が生じる} という事象の確率は $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ である. 各 C_i が n_i 回生じる組み合わせは全部で $n! / (n_1! n_2! \dots n_k!)$ 通りあり, これらは全て同じ確率 $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ であるから,

$$P(\{C_i \text{ が } n_i \text{ 回生じる } (i = 1, 2, \dots, k)\}) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}.$$

4.5 問題 4.5 の略解

1 期待値の定義より,

$$E(X) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

同様に,

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}.$$

よって, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (\alpha - \beta)^2 / 12$.

2

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^1 x(1-|x|)dx = \int_{-1}^0 x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

したがって、 $E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 5$ 。また、

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^1 x^2(1-|x|)dx = \int_{-1}^0 x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

よって、 $V(X) = 1/6 - 0^2 = 1/6$ 。

3 全積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ となるように a を定める。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = a \int_0^1 x^2 dx = a[x^3/3]_0^1 = a/3$$

なので、 $a = 3$ 。

$$P(X > 1/2) = 3 \int_{1/2}^1 x^2 dx = 3[x^3/3]_{1/2}^1 = 7/8.$$

5 $Z = (X - 50)/10$ とおくと、 $Z \sim N(0, 1)$ 。

$$P(70 \leq X) = P\left(\frac{70-50}{10} \leq \frac{X-50}{10}\right) = P(2 \leq Z) = 1 - \Phi(2) = 0.023.$$

同様にして、 $P(40 \leq X \leq 60) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.683$ 。 $P(X \leq 55) = P(Z \leq 0.5) = 0.691$ 。

- 6 ビスの直径を X とすれば, $X \sim N(2.7998, (0.0005)^2)$ となるから, $Z = (X - 2.7998)/0.0005 \sim N(0, 1)$ である. 合格の確率は,

$$\begin{aligned} P(2.7993 \leq X \leq 2.8007) &= P\left(\frac{2.7993 - 2.7998}{0.0005} \leq Z \leq \frac{2.8007 - 2.7998}{0.0005}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1.8) = \Phi(1.8) - \Phi(-1) \\ &= 0.964 - 0.159 = 0.805. \end{aligned}$$

したがって, 不合格の確率は 0.195.

- 7 一般に $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ならば, $P(X \geq \mu + 1.64\sigma) = 0.05$ であるから, 在庫量は $\mu + 1.64\sigma = 200 + 1.64 \times 25 = 241$ 以上あればよい.

- 9 (1) $X \sim N(64, 13^2)$ とおくと, $Z = (X - 64)/13 \sim N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} P(44 \leq X \leq 84) &= P\left(\frac{44 - 64}{13} \leq Z \leq \frac{84 - 64}{13}\right) = \Phi(1.54) - \Phi(-1.54) \\ &= 0.938 - 0.062 = 0.876 \end{aligned}$$

(2) 一般に, $P(1.64 \leq Z) = 0.05$ であるから, $64 + 1.64 \times 13 = 85.3$ 点以上. (3) $P(X \leq 40) = P(Z \leq -1.85) = \Phi(-1.85) = 0.032$ であるから, 下位 3.2% である.

- 10 $20(\text{人/時}) = \frac{1}{3}(\text{人/分})$ であるから, $X \sim Ex(1/3)$ である. したがって, $E(X) = 3(\text{分/人})$, $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = e^{-5/3} = 0.189$.

12 $P(X > x) = e^{-\lambda x}$ を用いると,

$$\begin{aligned} P(X > a+b | X > b) &= \frac{P(X > a+b, X > b)}{P(X > b)} \\ &= \frac{P(X > a+b)}{P(X > b)} \\ &= e^{-(a+b)} / e^{-b} = e^{-a} \\ &= P(X > a) \end{aligned}$$

となり示される．定理 4.24 を示す． $X \sim E_x(\lambda)$ とする．

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy.$$

ただし, $y = \lambda x$ と変数変換した．このとき, $dx = (1/\lambda)dy$. 部分積分によって,

$$\int_0^{\infty} y e^{-y} dy = [-y e^{-y}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 0 + [-e^{-y}]_0^{\infty} = 1$$

るから, $E(X) = 1/\lambda$ が分かった．以下は略す．

第5章 略解

5.1 問題5.1の略解

- 1 (1) X の周辺分布は, $P(X = -1) = 0.3, P(X = 0) = 0.4, P(X = 1) = 0.3$. よって, $E(X) = -1 \times 0.3 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 = 0, V(X) = 0.6$.
 (2) Y の周辺分布は, $P(Y = -1) = 0.4, P(Y = 0) = 0.2, P(Y = 1) = 0.4$.
 よって, $E(Y) = -1 \times 0.4 + 0 \times 0.2 + 1 \times 0.4 = 0, V(X) = 0.8$.
 (3) $E(XY) = (-1) \times (-1) \times 0.1 + (-1) \times 0 \times 0.1 + \cdots + 1 \times 1 \times 0.1 = 0$ であるから, $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0, \rho_{XY}(X, Y) = 0$

- 2 (1) X の周辺分布は, $P(X = 0) = 2/5, P(X = 1) = 1/5, P(X = 2) = 2/5$. Y の周辺分布は, $P(Y = 1) = 2/5, P(Y = 2) = 1/5, P(Y = 3) = 2/5$. (2) $E(X) = 0 \times 2/5 + 1 \times 1/5 + 2 \times 2/5 = 1, E(X^2) = 9/5, V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4/5$. (3) $E(Y) = 1 \times 2/5 + 2 \times 1/5 + 3 \times 2/5 = 2$ であるから,

$$E(XY) = 0 \times 1 \times 3/20 + 0 \times 2 \times 1/10 + \cdots + 1 \times 3 \times 3/20 = 2$$

と合わせて,

$$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2 - 1 \times 2 = 0$$

- (4) 独立に非ず. 例えば, $P(X = 1, Y = 2) \neq P(X = 1)P(Y = 2)$ から分かる.

3 略す.

4 (1) $P(Y = 250|X = 90) = 1/7$, $P(Y = 300|X = 90) = 2/7$, $P(Y = 350|X = 90) = 4/7$. (2) $E(Y|X = 90) = \sum_{y=250,300,350} yP(Y = y|X = 90) = 2250/7 = 321.4$. (3) $P(Y = 250|X = 110) = P(Y = 300|X = 110) = P(Y = 350|X = 110) = 1/3$. (4) $E(Y|X = 110) = 900/3 = 300$.

5 (1) 起こりうる結果を C_i と「 C_i 以外」に分けて考えれば, X_i は 2 項分布 $B(n, p_i)$ に従うから, $E(X_i) = np_i$. (2) 前問と同様に $V(X_i) = np_i(1 - p_i)$. (3) 多項分布の積率母関数 (関連図書などを参照されたい) は

$$\phi(t_1, t_2, \dots, t_k) = E\{e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_k X_k}\} = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \dots + p_k e^{t_k})^n$$

であり, これより,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1 \partial t_2}(0, 0, \dots, 0) = n(n-1)p_1 p_2$$

であるから, $E(X_1 X_2) = n(n-1)p_1 p_2$. よって, $C(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = n(n-1)p_1 p_2 - (np_1)(np_2) = -np_1 p_2$. 従って, $C(X_i, X_j) = -np_1 p_2$.

5.2 第5.2節の解答

- (1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$
 (2) $f(1, 1, 1, 0, 0) = p^3(1-p)^2$.
- 第 i 日目の X_i は互いに独立に同一のポアソン分布 $P_O(3)$ に従うとする. このとき, $P(X_i \leq 4) = 0.815$.

$$(1) P(X_1 \leq 4, X_2 \leq 4, X_3 \leq 4, X_4 \leq 4, X_5 \leq 4) = \prod_{i=1}^5 P(X_i \leq 4) = (0.815)^5 = 0.360.$$

$$(2) X \sim B(5, 0.815) \text{ とすると、} P(X = 3) = {}_5C_3(0.815)^3(1 - 0.815)^2 = 0.185$$

3. (1)

$$P(X_i \leq z) = \begin{cases} 1 & (1 < z) \\ z & (0 \leq z \leq 1) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

であるから,

$$P(Z \leq z) = P(X_1 \leq z, X_2 \leq z, \dots, X_n \leq z) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq z) = \begin{cases} 1 & (1 < z) \\ z^n & (0 \leq z \leq 1) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

となる.

(2)

$$f(z) = \begin{cases} nz^{n-1} & (0 \leq z \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外の } z). \end{cases}$$

$$4. (1) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta - \alpha)^n} & (0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$(2) P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n {}_n C_{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}.$$

$$(3) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} & (0 < x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

5.3 第5.3節の解答

1. $E(T) = 0$ であるから, $C(Z, T) = E(ZT)$.

$$\begin{aligned} E(ZT) &= E\{(X+Y)(X-Y)\} = E(X^2) - E(Y^2) \\ &= V(X) - V(Y) = 0. \end{aligned}$$

2. $E(X) = (a+b)/2$, $E(Y) = (c+d)/2$ であるから, $E(XY) = E(X)E(Y) = (a+b)(c+d)/4$. $E(X^2) = (b^2 + ba + a^2)/3$, $E(Y^2) = (d^2 + dc + c^2)/3$ であるから, $E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2) = (b^2 + ba + a^2)(d^2 + dc + c^2)/9$. $V(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 = (b^2 + ba + a^2)(d^2 + dc + c^2)/9 - (a+b)^2(c+d)^2/16$.

3. $E(X) = 6 \int_0^1 x^2(1-x)dx = 1/2$. $E(1/Y) = 6 \int_0^1 (1-y)dy = 3$. ゆえに, $E(X/Y) = E(X)E(1/Y) = 3/2$. ($E(X/Y) \neq E(X)/E(Y)$ であることに注意!)

5.4 第5.4節の解答

1. $X_i \sim N(60, 8^2)$, $Y_i \sim N(50, 6^2)$ とおく.

(1) 定理 5.13 より, 求める分布は, $T = X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 \sim N(60+60+60+50+50, 64+64+64+36+36) = N(280, 264)$.

(2) $P(T > 300) = P(Z > (300 - 280)/264) = 1 - \Phi(1.23) = 0.109$.

(3) $3X \sim N(3 \times 60, 9 \times 64) = N(180, 576)$, $2Y \sim N(2 \times 50, 4 \times 36) = N(100, 144)$ であるから $3X+2Y \sim N(180+100, 576+144) = N(280, 726)$. (1)の分布と平均は同一だが、分散が異なる。

2. $N(3.2, (0.4)^2/16) = N(3.2, (0.1)^2)$. ゆえに, $Z = (\bar{X} - 3.2)/0.1 \sim N(0, 1)$. これより, $P(\bar{X} \leq 3.35) = P[(\bar{X} - 3.2)/0.1 \leq (3.35 - 3.2)/0.1] = P(Z \leq 1.5) = \Phi(1.5) = 0.933$.

3. 同様に考えて, $\Phi(-1.58) = 0.06$.
4. $X_1, X_2, \dots, X_{10000}$ は互いに独立に同一のベルヌーイ分布 $Ber(0.5)$ に従うとする. 求める確率は $P(0.485 \leq \bar{X} \leq 0.515)$ である. $E(\bar{X}) = 0.5$, $V(\bar{X}) = 0.000025$, $D(\bar{X}) = 0.005$ である. (1) $P(0.485 \leq \bar{X} \leq 0.515) = P(0.5 - 3 \times 0.005 \leq \bar{X} \leq 0.5 + 3 \times 0.005) \geq 1 - (1/3)^2 = 8/9$. (2) 近似的に $\bar{X} \sim N(0.5, (0.005)^2)$ であるから, $Z = (\bar{X} - 0.5)/0.005 \sim N(0, 1)$. よって, $P(0.485 \leq \bar{X} \leq 0.515) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 0.997$.
5. 不良品であることを 1, 不良品でないことを 0 で表す. X_1, X_2, \dots, X_{600} は互いに独立に同一のベルヌーイ分布 $Ber(0.1)$ に従うとする. このとき, 中心極限定理より, 近似的に $\bar{X} \sim N(0.1, 0.1 \times 0.9/600) = N(0.1, 0.00015)$. よって, 不良品数 $X = 600\bar{X}$ の分布は $N(60, 54)$ で表される. (1) 求める確率は, $P(50 \leq X) = P[(50 - 60)/\sqrt{54} \leq Z] = P(-1.36 \leq Z) = 0.913$. (2) $P(60 - 1.64\sqrt{54} \leq X \leq 60 + 1.64\sqrt{54}) = 0.9$ であるから, $c = 1.64\sqrt{54} = 12.09$. およそ 12 個.
6. $\bar{X} \sim N(5, 5/120)$ であるから, $c = 1.96\sqrt{5/120} = 0.40$.
7. 分布 F の平均を μ , 分散を σ^2 で表せば, 求める正規分布は $N(\mu, \sigma^2/100)$ となる. (1) $\mu = 1/4$, $\sigma^2 = 1/16$ であるから, $N(1/4, 1/1600) = n(0.25, (0.025)^2)$. (2) $\mu = \theta/2$, $\sigma^2 = \theta^2/12$ であるから, $N(\theta/2, \theta^2/1200)$. (3) $\mu = 1/2$, $\sigma^2 = 1/20$ であるから, $N(1/2, 1/2000) = N(0.5, 0.0005)$.
8. (1) $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ であるから, $E(Y_i) = \sigma^2 + \mu^2$. よって, 大数法則より, $\bar{Y} \rightarrow_p \sigma^2 + \mu^2$ となる. $U = \bar{Y}$ であるから, 求めるものが示された. (2) $f(x) = x^2$ と置く. これは連続. $\bar{X} \rightarrow_p \mu$ であるから, 注 5.6 の (5) より, $\bar{X}^2 = f(\bar{X}) \rightarrow_p f(\mu) = \mu^2$. (3) $U \rightarrow_p \sigma^2 + \mu^2$, $\bar{X}^2 \rightarrow_p \mu^2$ であるから, $U - \bar{X}^2 \rightarrow_p (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$. (4) $s^2 = c_n S^2 \rightarrow_p 1 \times \sigma^2 = \sigma^2$ である.

第6章 略解

6.2 第6.2節の略解

1. 易しい.
 - (1) 定理 6.1 より, $E(\bar{X}) = \mu$, $V(\bar{X}) = \sigma^2/n$.
 - (2) 定理 6.2 より, $E(s^2) = \sigma^2$.
2. 上問と同様である.
 - (1) 定理 6.1 より, $E(\bar{X}) = 1/\lambda$, $V(\bar{X}) = 1/(\lambda^2 n)$.
 - (2) 定理 6.2 より, $E(s^2) = 1/\lambda^2$.
3.
 - (1) 定理 6.1 より, $E(\bar{X}) = p$, $V(\bar{X}) = p(1-p)/n$.
 - (2) 定理 6.2 より, $E(s^2) = p(1-p)$.
 - (3) 注 6.1 を根拠に 0.3 と推定される.
 - (4) 問題 2.3 の 6 で示した通り, $S^2 = \bar{X}(1-\bar{X})$ であり, また, $s^2 = \frac{n}{n-1}S^2$ であるから, 答が出る.
 - (5) 注 6.1 を根拠に $s^2 = (20/19) \times 0.3 \times 0.7 = 0.22$ で推定される.
4. 易しいので略す.
5. 略す.

6.3 第6.3節の略解(2と3は本ページ下部に記載)

1. (1) 定義より, $\chi^2(3)$.
 (2) (6.3.4) より, $E(Y) = 3, V(Y) = 6$.
 (3) $P(Y \leq 1) = 0.608, P(3 - \sqrt{6} \leq Y \leq 3 + \sqrt{6}) = 0.766, P(3 - 2\sqrt{6} \leq Y \leq 3 + 2\sqrt{6}) = 0.952$.
- 4 σ^2 の 90%信頼区間は $[19s^2/30.14, 19s^2/10.12] = [24.2, 74.2]$, μ の 90%信頼区間は $[169 \pm 1.73 \times 6.2/\sqrt{20}] = [166.6, 171.4]$
- 5 μ の 95%信頼区間は $[20 \pm 2.028 \times \sqrt{25/37}] = [18.3, 21.7]$, σ^2 の 95%信頼区間は $[36s^2/54.4, 36s^2/21.3] = [16.5, 42.2]$.

6.4 第6.4節の略解

1. 定理 6.5 より,

$$T \sim N\left(20 - 30, \frac{25}{40} + \frac{36}{30}\right) = N(-10, 1.825),$$

従って, $E(T) = -10, V(T) = 1.825 (=219/120)$.

2. (1) (6.4.4) 式より, $\mu_1 - \mu_2$ の 95%信頼区間は

$$\begin{aligned} & \left[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm 1.96 \sqrt{100 \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25} \right)} \right] \\ &= \left[(60 - 66) \pm 1.96 \sqrt{100 \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25} \right)} \right] \\ &= [-11.38, -0.69] \end{aligned}$$

と求められる. 信頼区間には 0 が含まれ, 2 つの試験方式の間には差があるとは言えない.

2. chiinv 関数を用いる。(1) $\text{chiinv}(0.05, 25)$ の値は 37.7, $\text{chiinv}(0.95, 25)$ の値は 14.6 だから、 $d=14.6, c=37.7$ 。(2) $\text{chiinv}(0.1, 25)$ の値は 34.4。よって $c=34.4$

3. (1) $c=1.708$, (2) $c=1.316$

(2) (6.4.4) 式より, プールされた分散は

$$s^2 = \frac{1}{53} \{29s_1^2 + 24s_2^2\} = 121.7.$$

例 6.12 と同様に議論して, $\mu_1 - \mu_2$ の 95%信頼区間は

$$\begin{aligned} & \left[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{0.025}(53) \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25} \right)} \right] \\ &= \left[(60 - 66) \pm 2.006 \sqrt{121.7 \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25} \right)} \right] \\ &= [-11.99, -0.01] \end{aligned}$$

信頼区間には 0 が含まれず, 2 つの試験方式の間には差があると言える.

(3) 例 6.14 と同様に議論して, $\theta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ の 95%信頼区間は, $\hat{\theta} = s_1^2/s_2^2$ と置けば

$$\left[\hat{\theta}/2.22, \hat{\theta}/0.46 \right] = [0.56/2.22, 0.56/0.46] = [0.25, 1.21].$$

3. (6.4.10) 式の Z は標準正規分布に従う. また, 定理 6.7(2) より $Y = (m+n-2)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$ である. 同定理 (3) より Z と Y は独立となるから, t 分布の定義より,

$$\frac{Z}{\sqrt{Y/(m+n-2)}} \sim t(m+n-2)$$

が成り立つ. ここで, Z と Y の定義を代入すれば,

$$\frac{Z}{\sqrt{Y/(m+n-2)}} = \frac{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2(1/m+1/n)}}}{\sqrt{\frac{(m+n-2)s^2/\sigma^2}{m+n-2}}} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s^2(1/m+1/n)}}$$

であることが分かる.

5 (1) $F = \frac{Y_1/10}{Y_2/10} = \frac{Y_1}{Y_2}$ と置くと, $F \sim F(10, 10)$ であり, $P(Y_1 \leq Y_2) = P(F \leq 1) = 0.5$.

(2) $F = \frac{Y_1/10}{Y_2/20} = \frac{2Y_1}{Y_2}$ と置くと, $F \sim F(10, 20)$ であり, $P(Y_1 \leq Y_2) = P(F \leq 2) = 0.91$.

第7章 略解

7.1 第7.1節の略解

1. $2 \times 2.58\sqrt{16/n} \leq 3$ を解いて, $n \geq 48$.
2. (1) 定理 7.1 より, $[\bar{X} \pm 2.023\sqrt{s^2/40}] = [55 \pm 2.023\sqrt{146.4/40}] = [51.1, 58.9]$. (2) 定理 7.2 より, $[39s^2/58.1, 39s^2/23.7] = [98.2, 241.4]$.
3. (1) $[\bar{X} \pm 2.160\sqrt{s_1^2/14}] = [44.2 \pm 2.160\sqrt{4.2/14}] = [43.0, 45.4]$. (2) $[13s_1^2/24.7, 13s_1^2/5.0] = [2.2, 10.9]$. (3) 定理 7.4 を用いる. プールされた分散は $s^2 = [13s_1^2 + 9s_2^2]/22 = 5.1$. $[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm 2.074\sqrt{s^2(1/14 + 1/10)}] = [-7.34, -3.46]$.
4. (1) 定理 7.5 より, $[\bar{X} \pm 1.96\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})/200}] = [0.075, 0.165]$. (2) $2 \times 1.96\sqrt{1/4n} \leq 0.1$ を解いて, $n \geq 385$.
5. (1) と (2) は略. (3) 分布は, $N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{100} + \frac{p_2(1-p_2)}{150}\right)$. 信頼区間は, $[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm 1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{150}}] = [0.430, 0.636]$.
6. 定理 7.6 より, $[\bar{X} \pm 1.96\sqrt{\bar{X}/300}] = [24.4, 25.6]$
7. 定理 7.7 より, $[\bar{X} \pm 1.96\sqrt{\bar{X}^2/200}] = [4 \pm 1.96 \times 4/\sqrt{200}] = [3.45, 4.55]$.

7.2 第7.2節の略解

1. p と $p(1-p)$ の推定値はそれぞれ $\bar{X} = 11/20 = 0.55$, $s^2 = (20/19) \times (\bar{X} - \bar{X}) = 0.261$.
2. $\bar{X} = 4$ であるから , 推定値は 4.
3. μ と σ^2 の推定値はそれぞれ $\bar{X} = 46.3$, $s^2 = 152.2$.
4. (1) と (2) は本ページ下部に記載 . (3) を示す . $Y_i = c_i X_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とおくと , これらは独立だから ,

$$\begin{aligned} V(\hat{\mu}) &= V\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = V\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) \quad (\text{定理 5.10}) \\ &= \sum_{i=1}^n V(c_i X_i) = \sum_{i=1}^n c_i^2 V(X_i) \quad (\text{定理 4.9(1)}) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2 \end{aligned}$$

となつて示される .

次に (4) を示す .

$$\begin{aligned} V(\hat{\mu}) &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{n} + \left(c_i - \frac{1}{n} \right) \right]^2 \\ &= \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^n \left(c_i - \frac{1}{n} \right)^2 + 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(c_i - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^n \left(c_i - \frac{1}{n} \right)^2 \right\} \quad (\text{上式の最後の項はゼロ}) \end{aligned}$$

よつて、

$$V(\hat{\mu}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2 = \frac{\sigma^2}{n} = V(\bar{X})$$

4. (1) $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ は不偏 $\Leftrightarrow E\{\sum_{i=1}^n c_i X_i\} = \mu$ for all $\mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i E(X_i) = \mu$ for all μ
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i \mu = \mu$ for all $\mu \Leftrightarrow \mu \sum_{i=1}^n c_i = \mu$ for all $\mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i = 1$
- (2) \bar{X} は $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1/n$ としたものであり、 $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ を明らかに満たすから不偏。

5 同時密度関数は

$$\prod_{i=1}^n f(x_i) = (1 + \theta)^n \prod_{i=1}^n x_i^\theta.$$

これを θ の関数と見て, $L(\theta)$ とおく. 対数尤度関数 $\ell(\theta) = \log L(\theta)$ は

$$\ell(\theta) = n \log(1 + \theta) + \theta \sum_{i=1}^n \log x_i$$

となる. これを θ で微分すると

$$\ell'(\theta) = n/(1 + \theta) + \sum_{i=1}^n \log x_i$$

となるから, これを 0 と置いて, 最尤推定量

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i} - 1$$

を得る (増減表もチェックのこと).

6 (1) 指数分布の平均が $1/\lambda$ であることから明らか. (2) 同時密度関数は

$$\lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i)$$

である. よって対数尤度関数は,

$$n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

となる. これを λ で微分すると, $n/\lambda - \sum_{i=1}^n x_i$ となるから, これを 0 と置いた方程式の解は $\lambda = n/\sum_{i=1}^n x_i$. 従って, 求める最尤推定量は

$1/\bar{X}$. (3) $\bar{X} = 6.11$ だから, λ は $1/\bar{X} = 0.16$ と推定される. これは1分当たりの平均注文到着数であるから, 求める注文数は $60 \times 0.16 = 9.8$. 約10件.

7 ここでは最尤推定量を考えてみよう. X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立に一樣分布 $U(0, \theta)$ に従うとき, θ の最尤推定量は X_1, X_2, \dots, X_n の最大値である. 従って, θ は 10.7 と推定される.

8 (1) 同時密度関数は,

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_i - \mu)^2/2\sigma^2} = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

である. 従って, 対数尤度関数は,

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

ここで, μ は第3項のみに現れ,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2$$

であるから, 第3項は $\mu = \bar{x}$ のときに最小となる. 従って, 各 σ^2 に対し,

$$\ell(\mu, \sigma^2) \leq \ell(\bar{x}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

が成り立つ. 上式右辺を σ^2 の関数と見て, $\bar{\ell}(\sigma^2)$ と置き, 微分すると,

$$\bar{\ell}'(\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

であるから, $\bar{\ell}'(\sigma^2) = 0$ の解は $\sigma^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = S^2$ であることが分かる. 即ち, 各 (μ, σ^2) に対して

$$\ell(\mu, \sigma^2) \leq \ell(\bar{x}, S^2)$$

が成立する. よって, 求める最尤推定量は (\bar{X}, S^2) である. (2) S . (3) S/\bar{X} .

第8章 略解

8.1 問題 8.1 の略解

- 1 (1) 定理 8.1 を用いる． $T = (\bar{X} - 108.6)/\sqrt{4.6^2/40}$ と定義する．検定方式は， $|T| > z_{0.025} = 1.96$ のとき帰無仮説 $H_0 : \mu = 108.6$ を棄却するというものである． $T = (116.7 - 108.6)/\sqrt{4.6^2/40} = 11.137$ であるから H_0 は棄却され，平均身長は変化したという結論を得る．(2) 定理 8.2 を用いる．検定方式は $T > z_{0.05} = 1.64$ のとき帰無仮説 H_0 を棄却するというものである．上問同様に棄却され，平均身長は増加したという結論を得る．(3) 第 1 種の誤りは「平均身長が増加していないにも関わらず，増加したと結論する誤り」，第 2 種の誤りは「平均身長が増加しているにも関わらず，増加していないと結論する誤り」．
- 2 定理 8.2 を用いる． $T = (\bar{X} - 58)/\sqrt{190/50}$ と定義する．検定方式は， $T > z_{0.05} = 1.64$ のとき帰無仮説 $H_0 : \mu = 58$ を棄却するというものである． $T = (65 - 58)/\sqrt{190/50} = 3.591$ であるから H_0 は棄却され，特設クラスの生徒は特に優れていると言える．
- 3 定理 8.2 を用いる． $T = (\bar{X} - 15)/\sqrt{25/16}$ と定義する．検定方式は， $T > z_{0.1} = 1.28$ ($z_{0.05} = 1.64$) のとき帰無仮説 $H_0 : \mu = 15$ を棄却するというものである． $T = (65 - 58)/\sqrt{190/50} = 3.591$ であるから，(1) でも (2) でも帰無仮説は棄却される．
- 4 定理 8.2 を用いる． $T = (\bar{X} - 0)/\sqrt{9/10}$ と定義する．検定方式は，

$T > z_{0.05} = 1.64$ のとき帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$ を棄却するというものである． $T = (2.8 - 0)/\sqrt{9/10} = 2.951$ であるから H_0 は棄却される．

- 5 (1) 第 1 種の誤りは「被告人が無罪であるにも関わらず，有罪とする誤り」，第 2 種の誤りは「被告人が有罪であるにも関わらず，無罪とする誤り」．重大なのは第 1 種の誤り．(2) 第 1 種の誤りは「火災報知器が故障していないにも関わらず，故障しているとする誤り」，第 2 種の誤りは「火災報知器が故障しているにも関わらず，故障していないとする誤り」．重大なのは第 2 種の誤り．(3)(4) は略す．

8.2 問題 8.2 の略解

本節以降は，前節よりも記述を簡略にする．

- 1 (1) 定理 8.3 を用いる．検定統計量は $t = (\bar{X} - 108.6)/\sqrt{s^2/40}$ であり，その実現値は $t = 9.859$ ．臨界値は $t_{0.025}(39) = 2.023$ であるから帰無仮説 H_0 は棄却される．(2) 定理 8.4 を用いる．臨界値は $t_{0.05}(39) = 1.685$ であるから帰無仮説 H_0 は棄却される．
- 2 定理 8.4 を用いる．検定統計量は $t = (\bar{X} - 58)/\sqrt{s^2/50}$ であり，その実現値は $t = 6.877$ ．臨界値は $t_{0.05}(49) = 1.677$ であるから帰無仮説 H_0 は棄却される．
- 3 定理 8.4 を用いる．検定統計量は $t = (\bar{X} - 0)/\sqrt{s^2/10}$ であり，その実現値は $t = 3.055$ である．臨界値は $t_{0.05}(9) = 1.833$ であるから， H_0 は棄却される．
- 4 定理 8.4 の (8.2.8) を用いる． $t = (\bar{X} - 190)/\sqrt{s^2/30}$ と置くと， $t = -1.806$ ．他方，臨界値は $-t_{0.05}(29) = -1.699$ であるから， H_0 は棄却される．

- 5 定理 8.4 の (8.2.8) の検定は, この問題に対しても自然な検定方式であると考えられる. 例は略す.

8.3 問題 8.3 の略解

1. 定理 8.5 の検定を用いる. $Y = 39s^2/(4.6)^2 > \chi_{0.05}^2(39) = 54.57$ なるとき, H_0 を棄却する. $Y = 49.76$ であるから, H_0 は棄却されない.
2. 定理 8.5 の検定を用いる. $Y = 14s^2/(0.005)^2 > \chi_{0.1}^2(14) = 21.06$ なるとき, H_0 を棄却する. $Y = 20.16$ であるから, H_0 は棄却されない.
3. (1) $Y = 29s^2/18 > \chi_{0.05}^2(29) = 42.56$ なるとき, H_0 を棄却. $Y = 40.28$ であるから, H_0 は棄却されない. (2) 臨界値は $\chi_{0.1}^2(29) = 39.09$ となるから, H_0 は棄却される. (3) $Y = 89s^2/18 = 123.61$ であり, 臨界値 $\chi_{0.05}^2(89) = 112.02$ を超えるから H_0 は棄却される.

8.4 問題 8.4 の略解

1. (1) 定理 8.7 の検定を用いる. プールされた分散は $s^2 = (13s_1^2 + 9s_2^2)/22 = 5.1$ と計算される. $t = (\bar{X} - \bar{Y})/\sqrt{s^2(1/14 + 1/10)}$ と置く. $t < -t_{0.95}(22) = -1.717$ のとき, H_0 を棄却する. $t = -5.775$ であるから, H_0 は棄却される. (2) 定理 8.9 の検定を用いる. $F = s_1^2/s_2^2$ と置く. $F < F_{0.95}(13, 9) = 0.368$ のとき, H_0 を棄却する. $F = 0.656$ であるから, H_0 は棄却されない.
2. (1) 定理 8.8 の検定を用いる. $t = (\bar{X} - \bar{Y})/\sqrt{s^2(1/10 + 1/10)}$ と置く. $|t| > t_{0.025}(18) = 2.101$ のとき, H_0 を棄却する. $t = -4.183$ であるから, H_0 は棄却される. (2) $F = s_1^2/s_2^2$ と置く. $F > F_{0.05}(9, 9) = 3.179$ のとき, H_0 を棄却する. $F = 2.333$ であるから, H_0 は棄却されない.

(3) $\hat{Z} = (\bar{X} - \bar{Y}) / \sqrt{s_1^2/9 + s_2^2/9}$ と置く . $|\hat{Z}| > z_{0.025} = 1.96$ のとき , H_0 を棄却する . $\hat{Z} = -3.969$ であるから H_0 は棄却される .

8.5 問題 8.5 の略解

1. 8.5.1 節の両側検定を用いる . 帰無仮説 $H_0 : p = 0.7$ を対立仮説 $H_1 : p \neq 0.7$ に対して , 有意水準 0.05 で検定する . $\bar{X} = 360/600 = 0.6$ である . $Z = (0.6 - 0.7) / \sqrt{0.7 \times 0.3/600} = -5.345$ であり , $|Z| > z_{0.025} = 1.96$ であるから , H_0 は棄却される .

2. (1) $\bar{X} \sim N(p, p(1-p)/m)$, $\bar{Y} \sim N(q, q(1-q)/n)$. (2) $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(p - q, \frac{p(1-p)}{m} + \frac{q(1-q)}{n}\right)$. (3) 上問より ,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (p - q)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{m} + \frac{q(1-q)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

である . 大数法則より , $m \rightarrow \infty$ のとき , \bar{X} は p に確率収束する . よって , 注 5.6 の (5) より $\bar{X}(1 - \bar{X})/m$ は $p(1-p)/m$ に確率収束する . 同様に , $n \rightarrow \infty$ のとき , $\bar{Y}(1 - \bar{Y})/n$ は $q(1-q)/n$ に確率収束する . よって , $p(1-p)/m + q(1-q)/n$ を $\bar{X}(1 - \bar{X})/m + \bar{Y}(1 - \bar{Y})/n$ で近似することが出来るから ,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (p - q)}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{m} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n}}} \sim N(0, 1)$$

と考えてよい . $H_0 : p = q$ が正しいとき , 上式の確率変数は Z に等しいから , $Z \sim N(0, 1)$ が成り立つ . (4) $\bar{X} = 80/120$, $\bar{Y} = 45/90$ とすれば , $Z = 2.449$. 臨界値 $z_{0.025} = 1.96$ と比較して , H_0 を棄却する .

3. 上問と同様であるから省略する .

4. (8.5.15) に当てはめて,

$$U = \frac{(80 - 53.3)^2}{53.3} + \frac{(30 - 33.3)^2}{33.3} + \cdots + \frac{(60 - 46.7)^2}{46.7} = 40.05.$$

臨界値は $\chi_{0.05}^2(4) = 9.49$ であるから, 独立という帰無仮説は棄却される.

5. 上問と同様に

$$U = \frac{(12 - 13.2)^2}{13.2} + \frac{(48 - 46.8)^2}{46.8} + \frac{(10 - 8.8)^2}{8.8} + \frac{(30 - 31.2)^2}{31.2} = 0.350.$$

臨界値は $\chi_{0.05}^2(1) = 3.841$ であるから, 独立という帰無仮説は棄却されない.

6. 各組合せ (A_i, B_j) の観測度数を n_{ij} と置けば, 尤度関数は

$$(p_1q_1)^{n_{11}}(p_1q_2)^{n_{12}}(p_2q_1)^{n_{21}}(p_2q_2)^{n_{22}}$$

となる． $p_2 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - q_1$ であるから , これは

$$\begin{aligned} & p_1^{n_{11}+n_{12}}(1-p_1)^{n_{21}+n_{22}} \times q_1^{n_{11}+n_{21}}(1-q_1)^{n_{12}+n_{22}} \\ &= p_1^{n_{1\cdot}}(1-p_1)^{n_{2\cdot}} \times q_1^{n_{\cdot 1}}(1-q_1)^{n_{\cdot 2}} \\ &= p_1^{n_{1\cdot}}(1-p_1)^{n-n_{1\cdot}} \times q_1^{n_{\cdot 1}}(1-q_1)^{n-n_{\cdot 1}} \end{aligned}$$

と表せる．よって , 各因数をそれぞれ最大化すればよく ,

$$p_1 = n_{1\cdot}/n, \quad q_1 = n_{\cdot 1}/n$$

が求める最尤推定量となる．勿論 , p_2 と q_2 の最尤推定量はそれぞれ $1 - p_1 = n_{2\cdot}/n$, $1 - q_1 = n_{\cdot 2}/n$ である．