表 1.1　ラプラス変換表

(i) 主な関数のラプラス変換		(ii) ラプラス変換の基本法則	
$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F]$	$F(s)=\mathcal{L}[f]$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F]$	$F(s)=\mathcal{L}[f]$
1	$\dfrac{1}{s}$	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$F(as)$
t^n (n：自然数)	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$f(t-\lambda)\quad(0<\lambda\leq t)$	$e^{-\lambda s}F(s)$
$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{s-\lambda}$	$e^{-\lambda t}f(t)$	$F(s+\lambda)$
$\cos\lambda t$	$\dfrac{s}{s^2+\lambda^2}$	$\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{1}{s}F(s)$
$\sin\lambda t$	$\dfrac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$	$\dfrac{d}{dt}f(t)$	$sF(s)-f'(0)$ トル
		$\dfrac{d^2}{dt^2}f(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
		$-tf(t)$	$\dfrac{d}{ds}F(s)$
		$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$

$$f(t)=t,\quad \mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)=\frac{1}{s^2},\quad -\lambda=a$$

と対応させることができる．したがって，te^{at} のラプラス変換は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[te^{at}\right]&=\mathcal{L}\left[e^{-\lambda t}f(t)\right]\\&=F(s+\lambda)\\&=F(s-a)\\&=\frac{1}{(s-a)^2}\end{aligned}$$

(2)　同様に変換表にある以下 2 つの関係を利用する．

$$\mathcal{L}\left[e^{-\lambda t}f(t)\right]=F(s+\lambda),\quad \mathcal{L}\left[\cos bt\right]=\frac{s}{s^2+b^2}$$

$e^{-at}\cos bt$ と $e^{-\lambda t}f(t)$ を比較すると，

と応力テンソル $\boldsymbol{T}$ によって決定される点に注意する必要がある．

次に応力テンソルの各成分が何を表すかを考えてみる．四面体の各座標軸に垂直な面に作用する応力ベクトルは，それぞれの面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{i} = [1, 0, 0]$, $\boldsymbol{j} = [0, 1, 0]$, $\boldsymbol{k} = [0, 0, 1]$ と応力テンソルの積として次のように表される．

上ツキ立体 T
(転置行列の記号)
上ツキ立体 T
上ツキ立体 T

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{i} &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{j} &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \qquad (3.25) \\
\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{k} &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

上式より応力テンソルの各成分は，図 3.5 に示すように各座標軸に垂直な面に作用する応力ベクトルの成分を表していることがわかる．またこのことより，テンソルの各成分について次の関係を導くことができる．図 3.6 のように z 軸に垂直な面上にある立方体の x 軸，y 軸に垂直な面に働く応力を τ_{xy}, τ_{yx} とする．それぞれの面にかかる力は面積をかけて $\tau_{xy}\Delta y\Delta z$, $\tau_{yx}\Delta x\Delta z$ となる．こ

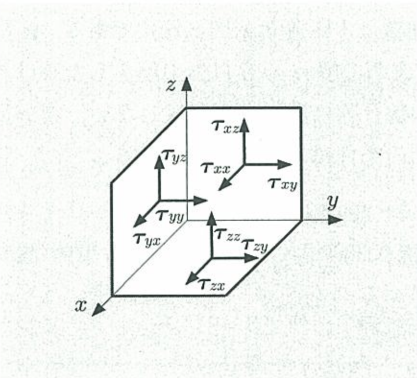

図 3.5　応力テンソルの成分

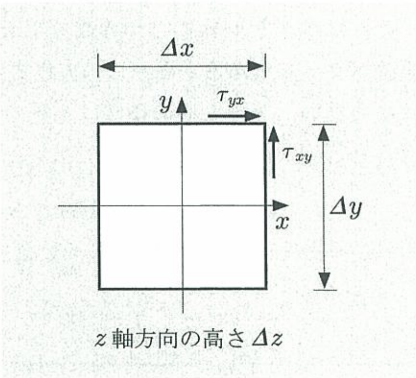

図 3.6　応力によるモーメント