

問題略解

特に断りのない限り複号同順である.

第1章

1 (1) e (2) e^a

2 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

3 略

4 略

5 $\sin 3x = -4(\sin x)^3 + 3\sin x$, $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$

6 (1) $8(x^2+x+1)^7(2x+1)$ (2) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (3) $\frac{1}{x \log a}$ (4) $30x(\sin(5x^2))^2 \cos(5x^2)$

7 (1) $\frac{(\sin x)^8}{8} + C$ (2) $-\frac{1}{(x^2-2x+2)^2} + C$ (3) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} \log x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$

8 f の不定積分を F とし, $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = F(h(x)) - F(g(x))$ の両辺を微分する.

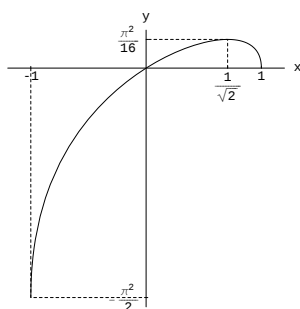
9 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{3}{4}\pi$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{5}{7}$

10 正接の加法定理より.

11 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) π

12 (1) $\frac{1}{\sqrt{-x^2-5x-4}}$ (2) $\frac{15}{9x^2-12x+29}$ (3) $-\frac{1}{1+x^2}$
(4) $\frac{2}{1+x^2}$ ($|x| < 1$), $-\frac{2}{1+x^2}$ ($|x| > 1$)

13 グラフの概形は図のとおり.



14 $f(x) = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$ とおく. $0 < x < 1$ において $f(x)$ と $\cos^{-1} x$ はともに連続で導関数が一致するから $f(x) = \cos^{-1} x + c$ ($0 < x < 1$) (c は定数) であり, 例えば $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を代入して $c = 0$ がわかる. $x = 0, 1$ の場合は連続性あるいは直接代入による. $-1 < x < 0$ の場合も同様.

15 置換 $x = ay$ により $\int \frac{dy}{1+y^2}$, $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ に帰着.

16 (1) $\frac{1}{5\sqrt{7}} \tan^{-1} \frac{5x-3}{\sqrt{7}} + C$ (2) $\frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3x-2}{\sqrt{11}} + C$

17 (1) ヒント: $\int_0^p x' \sqrt{a^2 - x^2} dx$

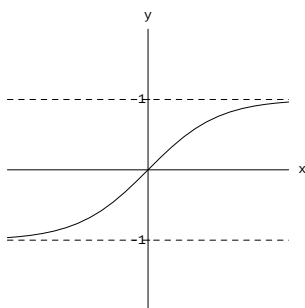
(2) 原点と点 $(p, \pm\sqrt{a^2 - p^2})$ を結ぶ線分でこの図形を一つの三角形と二つの扇形に分割して考える
 と $2 \int_0^p \sqrt{a^2 - x^2} dx = S = p\sqrt{a^2 - p^2} + 2 \cdot \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{p}{a}$

18 (1) $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C$ (2) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$ (3) $x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$

19 略

20 (1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 2 (4) $\sqrt{3}$

21 原点に関し点対称, 定義域 $(-\infty, +\infty)$ で単調増加, $x < 0$ で下に凸, $x > 0$ で上に凸, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x = \pm 1$



22 $\tanh^{-1}$ の定義域は $(-1, 1)$ で, また具体的な形は $\tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$

23* $(\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1), \quad \left(\tanh^{-1} \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$ より

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \tanh^{-1} x + C & (|x| < 1) \\ \tanh^{-1} \frac{1}{x} + C & (|x| > 1) \end{cases}$$

なお通常は, 部分分数を用いて

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

と計算する. 二通りの計算結果が同じものであることは前問からわかる.

24 置換 $x = ay$ により $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}}$ に帰着.

25 $x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2} + C$

26 (1) $a^n e^{ax+b}$ (2) $\log x \quad (n=0), \quad \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \quad (n \geq 1)$

(3) $\log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad (n=0), \quad (-1)^{n-1}(n-1)! \left(\frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x-1)^n} \right) \quad (n \geq 1)$

$$(4) (\cos x)^2 \ (n=0), \ 2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right) \ (n \geq 1)$$

$$(5) \sinh x \ (n=2m), \cosh x \ (n=2m+1) \text{ オイラーの公式を用いて定義域を複素数まで拡張しておけば, } (\sinh x)^{(n)} = (-i)^n \sinh \left(x + \frac{n\pi i}{2} \right) \text{ とあらわすこともできる.}$$

$$(6) \frac{(-1)^{n-1}(n-3)!(2x^2+2nx+n(n-1))}{(x+1)^n}$$

$$(7) \frac{1}{2} \left(\cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) - 5^n \cos \left(5x + \frac{n\pi}{2} \right) \right) = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2} (\cos x - 5^{2m} \cos 5x) & (n=2m) \\ \frac{(-1)^{m+1}}{2} (\sin x - 5^{2m+1} \sin 5x) & (n=2m+1) \end{cases}$$

$$(8) 3^{n-1} \left(3x \sin \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right) + n \sin \left(3x + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) \right) \\ = \begin{cases} (-1)^m 3^{2m-1} (3x \sin 3x - 2m \cos 3x) & (n=2m) \\ (-1)^m 3^{2m} (3x \cos 3x + (2m+1) \sin 3x) & (n=2m+1) \end{cases}$$

$$(9) (2\sqrt{3})^n e^{-3x} \sin \left(\sqrt{3}x + \frac{5n\pi}{6} \right) = (-2\sqrt{3})^n e^{-3x} \sin \left(\sqrt{3}x - \frac{n\pi}{6} \right)$$

$$27 \quad (1) \text{ 略} \quad (2) f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0) \quad (n \geq 1)$$

$$(3) f^{(0)}(0) = 0, \ f^{(1)}(0) = 1 \text{ および } (2) \text{ より.}$$

$$28 \quad (1) x - 2 - \frac{8}{3(x-2)} + \frac{5}{3(x+4)} \quad (2) \frac{9}{5(2x-1)} - \frac{11}{5(3x+1)} \quad (3) \frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}$$

$$(4) \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} \quad (5) \frac{x}{2(x^2+1)^2} + \frac{-x+2}{4(x^2+1)} + \frac{x-2}{4(x^2+3)}$$

$$29 \quad (1) (-1)^n n! \left(\frac{3}{(x-2)^{n+1}} - \frac{2}{(x-1)^{n+1}} \right)$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x^3-9}{x^2-5x+6} = x+5 + \frac{18}{x-3} + \frac{1}{x-2} & (n=0) \\ 1 - \frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} & (n=1) \\ (-1)^n n! \left(\frac{18}{(x-3)^n} + \frac{1}{(x-2)^n} \right) & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$(3) (-1)^n n! \left(\frac{1}{36(x-5)^{n+1}} - \frac{n+1}{6(x+1)^{n+2}} - \frac{1}{36(x+1)^{n+1}} \right)$$

$$30^* -120 \left(\frac{1}{(x-i)^6} + \frac{1}{(x+i)^6} \right) = \frac{-240(x^6 - 15x^4 + 15x^2 - 1)}{(x^2+1)^6}$$

$$31^* \quad (1) 3e^{\pi i} \quad (2) e^{\pi i/2} \quad (3) 5e^{i\theta} \quad \left(\theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} \right)$$

32* 略

33* 問26(9) 参照

第2章

1 (1) 収束 (2) 収束 (3) 発散 (4) 収束 (5) 収束 (6) 収束 ($c < 1$), 発散 ($c > 1$)

2* ヒント: $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \quad (k \geq n_0)$

3 (1) 収束 ($s > 1$), 発散 ($s \leq 1$) (2) 発散 (3) 収束

4 (1) 0 (2) 1 (3) $+\infty$ (4) 1 (5) e (6) $\sqrt{2}$ (7) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (8)* 1

5 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{4}\right)^n x^n \quad \left(|x| < \frac{4}{3}\right)$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) x^n \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right)$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ (5) $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ (6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (|x| < 1)$ (8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$

6 (1) $16 + 32(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{5^{n+1}} \right) (x-2)^n \quad (-2 < x < 6)$

(3) $\log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} (x-2)^n \quad (0 < x < 4)$

7 (1) $\frac{1}{2}x + \frac{23}{48}x^3 + \dots$ (2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3 + \dots$ (3) $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \dots$

8 (1) $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-1)^m (2m)! & (n = 2m+1) \end{cases}$ なお1章の問題27も参照.

(2) $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-1)^m (2m+1)! & (n = 2m+1) \end{cases}$

9 (1) -840 (2) 2520

第3章

1 (5)を除いて, c は 0 と x との間にある数である.

$$(1) 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{\sin c \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

(2) $n = 2m - 1$ とすれば

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{\sin c \cdot x^{2m}}{(2m)!}$$

また $n = 2m$ とすれば

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{\cos c \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$(3) 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} (1+c)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

$$(4) \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \cdots + (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{(c+1)^{n+2}} - \frac{1}{(c+2)^{n+2}}\right) x^{n+1}$$

$$(5) \log 3 + \frac{x-2}{3} - \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 3^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n} + (-1)^n \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1) \cdot (c+1)^{n+1}} \quad (c \text{ は } 2 \text{ と } x \text{ との間にある数})$$

$$(6) 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128(\sqrt{1+c})^7} \quad (7) x - \frac{x^3}{3} + \frac{c(1-c^2)}{(1+c^2)^4} x^4$$

$$(8) 1 + x - x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}e^c(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}c - \cos\sqrt{3}c)x^4$$

2 (1) 1.0192 ($f(x) = (1+x)^{\frac{1}{5}}$, $a = 0$, $n = 2$ にテイラーの定理を適用)

(2) 10.07936 ((1)と同様に $\sqrt[3]{1.024}$ の近似値を求め 10 倍)

(3) 0.0953 ($f(x) = \log(1+x)$, $a = 0$, $n = 3$ にテイラーの定理を適用)

3 1(7) で $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とせよ.

$$4 (1) \sqrt{2} \quad (2) 0 \quad (3) 0 \quad (4) 1 \quad (5) -1 \quad (6) 1 \quad (7) 1 \quad (8) \sqrt{ab}$$

$$(9) a \ (a \geq b \text{ のとき}), b \ (a < b \text{ のとき}) \quad (10) -\frac{1}{15} \quad (11) -\frac{1}{6} \quad (12) \frac{1}{6} \quad (13) -\frac{5}{12}$$

$$5 (1) -\infty \quad (2) 0$$

第4章

積分定数を省略する.

$$\begin{aligned}
 1 \quad (1) & \frac{1}{2} \tan^{-1} 2x \quad (2) \frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{2}}(x+2) \quad (3) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \tan^{-1} x \\
 (4) & \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x \quad (5) \frac{5}{8} \log |x-3| - \frac{3}{4} \log |x-1| + \frac{1}{8} \log |x+1| \\
 (6) & \frac{1}{x-3} + \log \left| \frac{x-5}{x-3} \right| \quad (7) \frac{1}{8} \tan^{-1}(x-1) + \frac{1}{8} \tan^{-1}(x+1) + \frac{1}{16} \log \frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} \\
 (8) & \frac{1}{2} \log \left| \frac{2+\cos x}{\cos x} \right| \quad (9) \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| \left(= \frac{1}{2} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) \\
 (10) & \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \log \left(\left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right) - \frac{x}{2} \left(= \log \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \frac{x}{2} \right) \\
 (11) & -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 3} \quad (12) \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{1}{4} \left(\tan \frac{x}{2} + 3 \right) \quad (13) \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| \\
 (14) & \log(x+2+\sqrt{2x-1}) - \tan^{-1} \frac{\sqrt{2x-1}+1}{2} \\
 (15) & \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 2\log(\sqrt{x}+1) + 4\tan^{-1} \sqrt[4]{x}
 \end{aligned}$$

$$2^* \int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{px+q}{rx+s}} \right) dx = \int R \left(\frac{st^n - q}{-rt^n + p}, t \right) \frac{n(ps - qr)t^{n-1}}{(-rt^n + p)^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad (1) & \sin^{-1} \frac{x-a}{a} \quad (2) -\sqrt{a^2-x^2} \quad (3) \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+A} - A \log(x+\sqrt{x^2+A}) \right) \\
 (4) & \frac{2}{A - (x + \sqrt{x^2+A})^2} \left(= \frac{-1}{x(x + \sqrt{x^2+A})} = \frac{x - \sqrt{x^2+A}}{Ax} = \frac{1}{A} - \frac{\sqrt{x^2+A}}{Ax} \right) \\
 (5) & \frac{1}{a} \log \left| \tan \frac{1}{2} \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} \right) \right| \left(= \frac{1}{2a} \log \frac{a - \sqrt{a^2-x^2}}{a + \sqrt{a^2-x^2}} \right) \\
 (6) & \sqrt{x^2+6x+10} - 3 \log(x+3+\sqrt{x^2+6x+10})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad (1) & f_n(x) = \int_0^x (\cos t)^n dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ は漸化式 } f_n(x) = \frac{1}{n} \sin x (\cos x)^{n-1} + \frac{n-1}{n} f_{n-2}(x) \quad (n \neq 0) \\
 & \text{をみたす. } \int (\cos x)^5 dx = f_5(x) + C = \frac{1}{15} \sin x (3(\cos x)^4 + 4(\cos x)^2 + 8) + C
 \end{aligned}$$

$$(2) (1) \text{ の記号で } \int \frac{dx}{(\cos x)^4} = f_{-4}(x) + C = \frac{1}{3} \left(2 \tan x + \frac{\sin x}{(\cos x)^3} \right) + C$$

$$\begin{aligned}
 (3) & f_n(x) = \int_1^x \frac{(\log t)^n}{\sqrt{t}} dt \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ は漸化式 } f_n(x) = 2\sqrt{x}(\log x)^n - 2nf_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \text{ をみ} \\
 & \text{たす. } \int \frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}} dx = f_3(x) + C = 2\sqrt{x}((\log x)^3 - 6(\log x)^2 + 24\log x - 48) + C
 \end{aligned}$$

$$5 \quad (1) \frac{1}{k-1} \quad (k > 1), +\infty \text{ に発散 } (k \leq 1) \quad (2) \frac{(b-a)^{1-k}}{1-k} \quad (k < 1), +\infty \text{ に発散 } (k \geq 1) \quad (3) \frac{\pi}{2}$$

$$(4) \frac{1}{3} \log 4 \quad (5) \frac{\pi}{6} \quad (6) 1 \quad (7) -\infty \text{ に発散 } (8) -4$$

6 比較定理と前問(1),(2)の結果を利用する. かつこ内は比較する関数の例

$$(1) \text{ 収束 } \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} \right) \quad (2) \text{ 発散 } \left(\frac{1}{ex\sqrt{x}} \right) \quad (3) \text{ 収束 } \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} \right) \quad (4) \text{ 収束 } \left(\frac{1}{x^2} \right) \quad (5) \text{ 収束 } \left(\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \right)$$

7 (1) x^{p-1} が優関数の例. (2) e^{-x} が優関数の例. (3) 定理 4.12 および (1), (2) より.

なお $p > 1$ の場合にも収束を示すことができ, 結局 (3) の広義積分は全ての $p > 0$ について収束することがわかる. その正体については 4.3 節で詳しく扱う.

8* 積分区間を二つに分けて考える. 左側では $\frac{1}{\sqrt{x}}$, 右側では $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ がそれぞれ優関数.

9 (1) 定理 2.14 の (1) $\Rightarrow$ (2) の証明より不等式の左半分, (2) $\Rightarrow$ (1) の証明より不等式の右半分. (2) 略

10 置換 $s^2 = t$ による.

$$11 \frac{(2m-1)!!}{2^m} \sqrt{\pi}$$

$$12 \quad (1) \frac{1}{\alpha k^{\frac{p}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (2) \frac{1}{\alpha^p} \Gamma(p) \quad (3) (b-a)^{p+q-1} B(p, q) \quad (4) \frac{(b-a)^{p+q-1}}{(b-c)^p (a-c)^q} B(p, q) \\ (5) \frac{1}{\alpha} B\left(\frac{p}{\alpha}, q\right) \quad (6) \frac{1}{2} B(p, q) \quad (7) \frac{1}{\alpha} B\left(\frac{p}{\alpha}, q - \frac{p}{\alpha}\right)$$

$$13 \quad (1) \frac{\sqrt{\pi}}{12\sqrt{3}} \quad (2) \frac{3}{128} \sqrt{\pi} \quad (3) \frac{27\pi}{16\sqrt{2}} \quad (4) \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad (5) \frac{5}{4096} \pi \quad (6) \frac{5}{27\sqrt{3}} \pi$$

$$14 \quad (1) e - e^{-1} (= 2 \sinh 1) \quad (2) \frac{14}{3} \quad (3) 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)} \left(= 2 - \sqrt{2} + \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} \right) \\ (4) 6a \quad (5) 2\sqrt{10} - \sqrt{2} \log(\sqrt{5}-2) (= 2\sqrt{10} + \sqrt{2} \log(2+\sqrt{5})) \\ (6) \pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2} \log(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}) \quad (7) \frac{\sqrt{a^2+1}(e^{2\pi a}-1)}{a}$$

$$15^* \quad (1) 8(a+b) \quad (2) 8(a-b)$$

$a = b$ の場合の外サイクロイドはカージオイド, $a = 4b$ の場合の内サイクロイドはアステロイド.

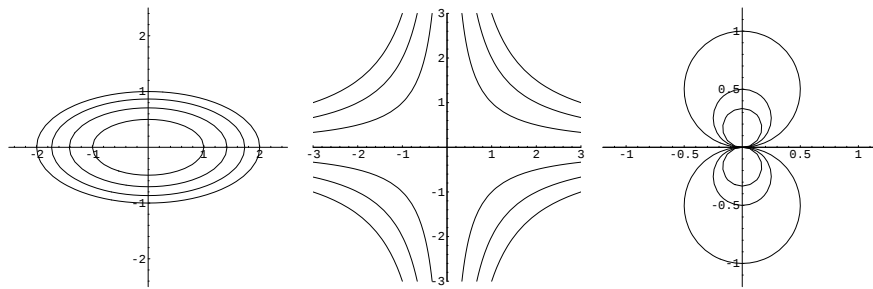
$$16^* \quad (1) \frac{a}{n} B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right) \quad (2) \frac{a^2}{2n} B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$$

$n = 1$ の場合は円であり, $n = 2$ の場合は連珠形 (レムニスケート) とよばれる.

$$17 \quad (1) \frac{5\sqrt{5}-1}{6} \pi \quad (2) \frac{64a^2\pi}{3}$$

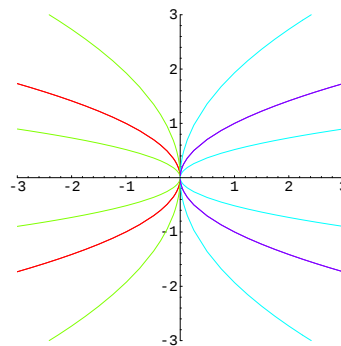
第5章

1 左より (1),(2),(3)



2 (1) 連続 (2) 連続でない (3) 連続でない (4) 連続 (5) 連続

3 等位線は下のとおり. f は原点で連続でない.



4 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} = f_{yx}, f_{yy}$ の順に記す.

- (1) $\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$
- (2) $\frac{-2y}{(x - y)^2}, \frac{2x}{(x - y)^2}, \frac{4y}{(x - y)^3}, \frac{-2(x + y)}{(x - y)^3}, \frac{4x}{(x - y)^3}.$
- (3) $2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}, (2y + 4x^2y^2)e^{x^2y}, (2x + 2x^3y)e^{x^2y}, x^4e^{x^2y}.$
- (4) $xy \cos(xy) + \sin(xy), x^2 \cos(xy), 2y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy), 2x \cos(xy) - x^2y \sin(xy), -x^3 \sin(xy).$
- (5) $\frac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}}, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}}, \frac{xy^3}{\sqrt{(1 - x^2y^2)^3}}, \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2y^2)^3}}, \frac{x^3y}{\sqrt{(1 - x^2y^2)^3}}.$
- (6) $yx^{y-1}, x^y \log x, y(y - 1)x^{y-2}, (1 + y \log x)x^{y-1}, x^y(\log x)^2.$

5 $f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy} = f_{yx}, f_{yz} = f_{zy}, f_{zx} = f_{xz}$ の順に記す.

- (1) $y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2, 0, 2xz^3, 6xy^2z, 2yz^3, 6xyz^2, 3y^2z^2.$
- (2) $y + z, z + x, x + y, 0, 0, 0, 1, 1, 1.$
- (3) $\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{2(-x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{2(x^2 - y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{2(x^2 + y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$
 $\frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-4yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-4zx}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$

(4) 三角関数には関係式がいろいろあるため、表記は一意的でない。以下は解答の一例である。

$$\begin{aligned} & \cos(y-z)\sin(-2x+y+z), \cos(z-x)\sin(x-2y+z), \cos(x-y)\sin(x+y-2z), \\ & -2\cos(y-z)\cos(-2x+y+z), -2\cos(z-x)\cos(x-2y+z), -2\cos(x-y)\cos(x+y-2z), \\ & \cos 2(x-y), \cos 2(y-z), \cos 2(z-x). \end{aligned}$$

6* $\mathbf{u}$ 方向に方向微分可能であることと $\mathbf{v}$ 方向に方向微分可能であることは同値。また $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ ($k \neq 0$) とすれば、方向微分係数の間にも k 倍の関係がある。

7 (1) 接平面は $z = 6x + 8y - 25$, 法線は $\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{8} = -z + 25$.

(2) 接平面は $z = -3y - 1$, 法線は $x = 1, \frac{y+1}{3} = z - 2$.

(3) 接平面は $z = x - y - 1$, 法線は $x - 2 = -y + 1 = -z$.

(4) 接平面は $z = -\pi x - y + 2\pi$, 法線は $\frac{x-1}{\pi} = y - \pi = z$.

(5) 接平面は $16x + 12y - 125z + 75 = 0$, 法線は $\frac{125(x-3)}{16} = \frac{125(y+4)}{12} = -z + \frac{3}{5}$.

8 $x_0x + y_0y + z_0z = r^2$ ($z_0 > 0$ であれば曲面 $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ の接平面として求める)

9 略

10 (1) $f = g(r) \iff \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ (2) $f = g(\theta) \iff \frac{\partial f}{\partial r} = 0$

11 (1) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ (2) 0 (3) $6(x+y)$ (4) 0 (5) $\frac{8}{x^2+y^2}$ (6) 0

12 連鎖律と逆変換の微分公式による. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ の順に記す.

$$\begin{aligned} (1) & \frac{1}{aq-bp} \left(q \frac{\partial z}{\partial s} - p \frac{\partial z}{\partial t} \right), \frac{1}{aq-bp} \left(-b \frac{\partial z}{\partial s} + a \frac{\partial z}{\partial t} \right), \frac{1}{(aq-bp)^2} \left(q^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - 2pq \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} + p^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right), \\ & \frac{1}{(aq-bp)^2} \left(-bq \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + (aq+bp) \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} - ap \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right), \frac{1}{(aq-bp)^2} \left(b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - 2ab \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2)^* & \frac{\partial z}{\partial s} e^{-s} \cos t - \frac{\partial z}{\partial t} e^{-s} \sin t, \frac{\partial z}{\partial s} e^{-s} \sin t + \frac{\partial z}{\partial t} e^{-s} \cos t, \\ & e^{-2s} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} (\cos t)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \sin 2t + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} (\sin t)^2 - \frac{\partial z}{\partial s} \cos 2t + \frac{\partial z}{\partial t} \sin 2t \right), \\ & \frac{e^{-2s}}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \sin 2t + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cos 2t - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \sin 2t - 2 \frac{\partial z}{\partial s} \sin 2t - 2 \frac{\partial z}{\partial t} \cos 2t \right), \\ & e^{-2s} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} (\sin t)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \sin 2t + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} (\cos t)^2 + \frac{\partial z}{\partial s} \cos 2t - \frac{\partial z}{\partial t} \sin 2t \right) \end{aligned}$$

13 (1) 停留点 $(2, 1)$, 極値なし (2) 停留点 $(0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 極大値 $f(0, 0) = 0$

(3) 停留点 $(0, 0), (0, -2)$, 極小値 $f(0, 0) = 0$ (4) 停留点 $(0, 0), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, 極小値 $f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = -\frac{27}{16}$

(5) 停留点 $(0, 0), (0, -1), (1, 0), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, 極大値 $f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

(6) 停留点 $(0, 0), (\pm 1, \pm 2)$, 極小値 $f(\pm 1, \pm 2) = -1$ (7) 停留点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 極大値 $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432}$

(8) 停留点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, 極値なし (9) 停留点 $(-1, -1)$, 極小値 $f(-1, -1) = 9$

(10) 停留点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, 極小値 $f\left(2, \frac{1}{2}\right) = 3 - \log 4$ (11) 停留点 $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 極値なし

(12) 停留点 $(0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$, 極小値 $f(0, 0) = 0$, 極大値 $f(0, \pm 1) = 2e^{-1}$

(13) 停留点 $(0, 0)$, 極値なし (14) 停留点 $(n\pi, -(-1)^n)$ ($n \in \mathbb{Z}$), 極値なし

(15) 周期性より $-\pi < x \leq \pi, -\pi < y \leq \pi$ の範囲の停留点を調べれば充分.

停留点 $(0, 0), (0, \pi), \left(\pm \frac{\pi}{3}, \mp \frac{\pi}{3}\right), (\pi, 0), (\pi, \pi)$

極大値 $f\left(\pm \frac{\pi}{3}, \mp \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$, 極小値 $f(\pi, \pi) = -3$

(16) 周期性より $-\pi < x \leq \pi, -\pi < y \leq \pi$ の範囲の停留点を調べれば充分.

停留点 $(0, 0), (0, \pi), \left(\pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{3}\right), \left(\pm \frac{\pi}{3}, \mp \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pm \frac{2\pi}{3}, \mp \frac{\pi}{3}\right), (\pi, 0), (\pi, \pi)$

極大値 $f(0, 0) = f\left(\pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}\right) = 2$, 極小値 $f\left(\pm \frac{\pi}{3}, \mp \frac{2\pi}{3}\right) = f(\pi, 0) = -2$

14* (1) 極値をとらない $\left(f(x, y) = f_3(x, y) + O(|x|^5), f_3(x, y) = \frac{x^2y + xy^2}{2}\right)$

[別解] 例 5.5 に倣って $f(t, t)$ を考えよ.

(2) 極小値 $\frac{1}{2}$ をとる $\left(f(x, y) = \frac{1}{2} + f_4(x, y) + O(|x|^6),\right.$

$f_4(x, y) = \frac{x^4 + 6xy + y^4}{48}, f_4(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^4 (1 + (\sin 2\theta)^2)}{48} \geq \frac{r^4}{48}\left.)\right)$

15 (1) 極大値をとる (2) 極小値をとる

16 (1) 正三角形の場合. (面積の 2 乗を二辺の長さの二変数関数とみて停留点を求める)

(2) $(x, y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i\right)$ (与えられた n 点の重心)

(3) $\frac{\sqrt{5}}{2} \left(f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 + \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{2}\right)^2\right)$ を調べる

(4) 直線を $y = px + q$ とおけば, 三点からの距離の 2 乗の和 $f(p, q)$ は

$$f(p, q) = \frac{(-1 + q)^2 + (p - 2 + q)^2 + (2p + q)^2}{p^2 + 1}$$

停留点 $(p, q) = (1, 0), (-1, 2)$ における f の値を比較し, 求める直線の方程式は $y = -x + 2$

17 (1) $y = \frac{5x + 2}{7}$ (2) $y = 1$ (3) $y = \frac{x + 17}{9}$ (4) $y = (1 - e^2 - \pi)x + 1$

18 (1) $y' = \frac{2x - y}{x - 2y}, y'' = \frac{18}{(x - 2y)^3}$ (2) $y' = -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}, y'' = -\frac{4(n-1)x^{n-2}}{y^{2n-1}}$

(3) $y' = -\frac{1 + \cos(x + y)}{2 + \cos(x + y)}, y'' = \frac{\sin(x + y)}{(2 + \cos(x + y))^3}$

(4) $y' = \frac{x(y - x)}{2x^2 + xy + y^2}, y'' = \frac{(y - 3x)(x + y)^2(x^2 + y^2)}{(2x^2 + xy + y^2)^3}$

19 (1) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ において極小値 $\frac{2}{3}$ を, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ において極大値 $-\frac{2}{3}$ をとる. (図 1)

(2) $(-2, 2)$ において極大値 2 をとる. (図 2)

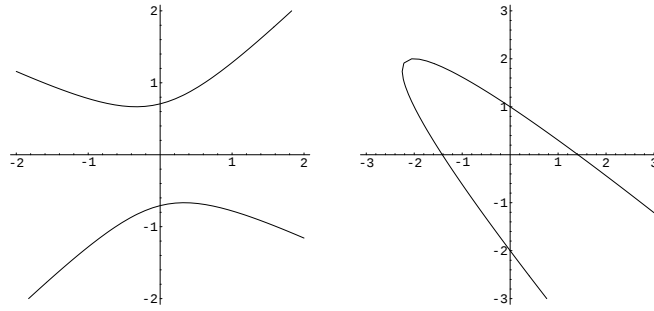


図 1: $x^2 + xy - 2y^2 + 1 = 0$ 図 2: $x^2 + 2xy + y^2 + y = 2$

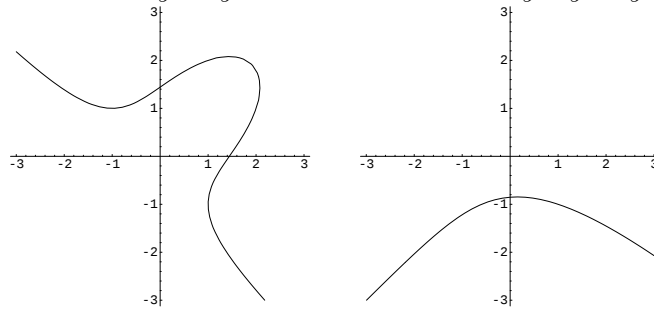


図 3: $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ 図 4: $2e^{x+y} - x + y = 0$

(3) $(-1, 1)$ において極小値 1 を, $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$ において極大値 $\sqrt[3]{9}$ をとる. (図 3)

(4) $\left(\frac{1 - \log 2}{2}, -\frac{1 + \log 2}{2}\right)$ において極大値 $-\frac{1 + \log 2}{2}$ をとる. (図 4)

20 (1) 極小値 $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 極大値 $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) 極小値 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, 極大値 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(3) 極小値 $f(\pm\sqrt{6}, \mp\sqrt{3}) = 18$, 極大値 $f(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6}) = 45$

(4) 極小値 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \mp\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -2$, 極大値 $f\left(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}, \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 3$

(5)* 極小値 $f(1, 1) = 2$, $f(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}) = 2(1 - \sqrt{3})^2$, 極大値 $f(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}) = 2(1 + \sqrt{3})^2$

21 $\sqrt{\frac{7}{8}}$ (条件 $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$ の下で $(x - 1)^2 + (y - 1)^2$ の極値を求める)

第6章

1 (1) $\frac{25}{6}$ (2) $18 \log 6 - 25 \log 5 + 8 \log 4 - \frac{3}{2} \left(= \log \frac{2^{34} \cdot 3^{18}}{5^{25}} - \frac{3}{2} \right)$ (3) $\frac{8\sqrt{2} - 10}{3}$
 (4) $\frac{\pi}{2} - 1$ (5) $\frac{\pi^2}{8}$ (6) $\frac{8a^3}{3}$ (7) $1 - e^{-1} + e^{-2}$ (8) $\frac{3}{8}$ (9) $e - e^{-1}$ (10) $\frac{2 - \sqrt{2}}{6}$

2 (1) $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}/2}^{\sqrt{4-y^2}/2} f(x, y) dx$ (2) $\int_0^4 dx \int_{x^2/4}^x f(x, y) dy$
 (3) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$
 (4) $\int_{-2}^0 dx \int_0^{x+2} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$

3 積分順序を交換して計算する.

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{3(e-1)}{2}$

4 (1) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = 2(s^2 + t^2)$ (2) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = abr$

5 (1) $\pi(1 - e^{-1})$ (2) $\frac{3\pi}{8}$ (3) π (4) $\frac{4\pi}{3}$ (5) $\frac{4(2\sqrt{2} - 1)\pi}{3}$ (6) $\frac{2 - \sqrt{2}}{6}$

(7) $\frac{4}{9}$ (極座標変換で $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ が D に写る)

(8)* $\frac{4}{3}$ (極座標変換で $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ が D に写る)

(9)* $\frac{16\sqrt{2}}{105}$ (極座標変換で $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \cos 2\theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$ が D に写る)

6 かつこ内は変数変換の例.

(1) $e^2 - 1$ ($s = x - y, t = x + y$) (2) $e - e^{-1}$ ($s = x - y, t = x + y$)

(3) 6π ($x = 2r \cos \theta, y = 3r \sin \theta$) (4) $\frac{2}{5}$ ($s = -3x + 2y, t = -x + 4y$)

(5) $\frac{\pi}{8}$ ($x + y = r \cos \theta, y = r \sin \theta$)

7 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{9}{10}(\sqrt[3]{4} - 1)$ (3) $\sqrt{2}\pi$ (4) π

8 (1) $a > 2, \frac{1}{(a-2)(a-1)}$ (2) $a < 1, \frac{\pi}{1-a}$

9 (1) π (2) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (ヒント: 変数変換 $s = 2x, t = \sqrt{3}y$)

(3) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (ヒント: 変数変換 $s = x - \frac{y}{2}, t = y$)

10* (1) $\frac{\pi^2}{8}$ (2) $\frac{\pi^2}{4}$

11 (1) 25 (2) $\frac{15}{2}$ (3) 5π

12 略

13 (1) $\frac{\pi a^4}{16}$ (2) $\frac{4\pi a^5}{5}$

14* 略

15* (1) $\frac{\pi^2 r^4}{2}$ (2) $\frac{8\pi^2 r^5}{15}$

附録 A

1 (1) $y = Ce^{\alpha x}$ (2) $y = Cx^\alpha$ (3) $y = Ce^{\cos x}$ (4) $y = Ce^{-x^2} + x^2 - 1$

(5) $y = C \cos x + \sin x$

2 (1) $y^2 = \frac{1}{C - 4x^3}$ (2) $\sin y = Ce^{-\cos x}$ (3) $y = \frac{2}{3 \log(x^2 + 1) + C}$

(4) $y = \sqrt{5} \tan \left(\sqrt{5} \log \left(x + \sqrt{x^2 + 3} \right) + C \right)$

3 (1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ (2) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ (3) $y = e^{-2x} (C_1 \cos \sqrt{5}x + C_2 \sin \sqrt{5}x)$

4 (1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2 + 3x + 1$

(2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{e^{5x}}{6}$

(3) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - x e^{2x}$

(4) $y = e^{-2x} (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x) - \frac{6 \cos 3x + \sin 3x}{37}$

(5) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x \cos 3x}{3}$

5 $y_1(x)z'' + (p(x)y_1(x) + 2y_1'(x))z' = r(x)$ に帰着. $y = C_1 x^3 + C_2 e^x$

6 $z' = \frac{f(z) - z}{x}$ に帰着. $\log |(y - x)(y^2 + 2xy + 3x^2)| = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{x + y}{\sqrt{2}x} + C$

7 $\frac{dY}{dX} = f \left(\frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}} \right)$ に帰着. $(2x - y - 14)^4 (y + 3x - 1) = C$

8 $z' + (1 - n)p(x)z + (1 - n)q(x) = 0$ に帰着. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + Ce^{x^3}}}$

9 $z' + (2a(x)y_0(x) + b(x))z + a(x)z^2 = 0$ に帰着. $y = \frac{1}{x + Ce^{x^2}} + 1$

10 $y = C_1 e^{x^2/2} + C_2 e^{x^3/3}$