問題略解

特に断りのない限り複号同順である.

第 1 章

1 (1) e (2) e^a

2 (1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (4) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

3 略

4 略

5 $\sin 3x = -4(\sin x)^3 + 3\sin x,\ \cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$

6 (1) $8(x^2+x+1)^7(2x+1)$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (3) $\dfrac{1}{x\log a}$ (4) $30x\left(\sin(5x^2)\right)^2\cos(5x^2)$

7 (1) $\dfrac{(\sin x)^8}{8}+C$ (2) $-\dfrac{1}{(x^2-2x+2)^2}+C$ (3) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\log x - \dfrac{4}{9}x\sqrt{x}+C$

8 f の不定積分を F とし, $\displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = F(h(x)) - F(g(x))$ の両辺を微分する.

9 (1) $\dfrac{\pi}{6}$ (2) $\dfrac{3}{4}\pi$ (3) $\dfrac{3}{4}$ (4) $\dfrac{5}{7}$

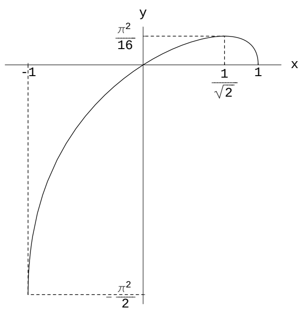
10 正接の加法定理より.

11 (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) π

12 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-5x-4}}$ (2) $\dfrac{15}{9x^2-12x+29}$ (3) $-\dfrac{1}{1+x^2}$

(4) $\dfrac{2}{1+x^2}$ $(|x|<1)$, $-\dfrac{2}{1+x^2}$ $(|x|>1)$

13 グラフの概形は図のとおり.



14 $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ とおく. $0<x<1$ において $f(x)$ と $\cos^{-1}x$ はともに連続で導関数が一致するから $f(x) = \cos^{-1}x + c$ $(0<x<1)$ (c は定数) であり, 例えば $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を代入して $c=0$ がわかる. $x=0,1$ の場合は連続性あるいは直接代入による. $-1<x<0$ の場合も同様.

15 置換 $x = ay$ により $\displaystyle\int\frac{dy}{1+y^2}$, $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ に帰着.

16 (1) $\dfrac{1}{5\sqrt{7}}\tan^{-1}\dfrac{5x-3}{\sqrt{7}}+C$ (2) $\dfrac{1}{3}\sin^{-1}\dfrac{3x-2}{\sqrt{11}}+C$

17 (1) ヒント: $\displaystyle\int_0^p x'\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

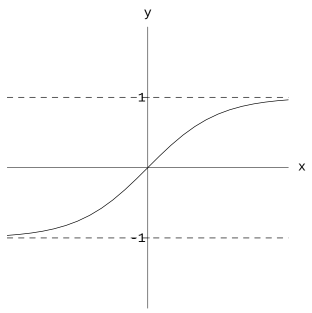
(2) 原点と点 $(p,\pm\sqrt{a^2-p^2})$ を結ぶ線分でこの図形を一つの三角形と二つの扇形に分割して考えると $2\displaystyle\int_0^p\sqrt{a^2-x^2}\,dx=S=p\sqrt{a^2-p^2}+2\cdot\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{p}{a}$

18 (1) $x\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+C$ (2) $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$ (3) $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C$

19 略

20 (1) $\dfrac{5}{4}$ (2) $\dfrac{3}{4}$ (3) 2 (4) $\sqrt{3}$

21 原点に関し点対称, 定義域 $(-\infty,+\infty)$ で単調増加, $x<0$ で下に凸, $x>0$ で上に凸, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\tanh x=\pm1$



22 $\tanh^{-1}$ の定義域は $(-1,1)$ で, また具体的な形は $\tanh^{-1}y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

23* $\left(\tanh^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{1-x^2}\ (|x|<1),\ \left(\tanh^{-1}\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{1-x^2}\ (|x|>1)$ より

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\begin{cases}\tanh^{-1}x+C & (|x|<1)\\ \tanh^{-1}\dfrac{1}{x}+C & (|x|>1)\end{cases}$$

なお通常は, 部分分数を用いて

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$

と計算する. 二通りの計算結果が同じものであることは前問からわかる.

24 置換 $x=ay$ により $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}$ に帰着.

25 $x\sinh^{-1}x-\sqrt{1+x^2}+C$

26 (1) a^ne^{ax+b} (2) $\log x\ (n=0),\ \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\ (n\geq1)$

(3) $\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\ (n=0),\ (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\dfrac{1}{(x+1)^n}-\dfrac{1}{(x-1)^n}\right)\quad(n\geq1)$

(4) $(\cos x)^2 \ (n=0),\ 2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\ (n \geq 1)$

(5) $\sinh x\ (n=2m),\ \cosh x\ (n=2m+1)$ オイラーの公式を用いて定義域を複素数まで拡げておけば, $(\sinh x)^{(n)} = (-i)^n \sinh\left(x+\dfrac{n\pi i}{2}\right)$ とあらわすこともできる.

(6) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)!(2x^2+2nx+n(n-1))}{(x+1)^n}$

(7) $$\frac{1}{2}\left(\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-5^n\cos\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{2}\left(\cos x - 5^{2m}\cos 5x\right) & (n=2m) \\ \dfrac{(-1)^{m+1}}{2}\left(\sin x - 5^{2m+1}\sin 5x\right) & (n=2m+1) \end{cases}$$

(8) $$3^{n-1}\left(3x\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\sin\left(3x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \begin{cases} (-1)^m 3^{2m-1}\left(3x\sin 3x - 2m\cos 3x\right) & (n=2m) \\ (-1)^m 3^{2m}\left(3x\cos 3x + (2m+1)\sin 3x\right) & (n=2m+1) \end{cases}$$

(9) $$\left(2\sqrt{3}\right)^n e^{-3x}\sin\left(\sqrt{3}x+\frac{5n\pi}{6}\right) = \left(-2\sqrt{3}\right)^n e^{-3x}\sin\left(\sqrt{3}x-\frac{n\pi}{6}\right)$$

27 (1) 略 (2) $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0) \quad (n \geq 1)$

(3) $f^{(0)}(0)=0,\ f^{(1)}(0)=1$ および (2) より.

28 (1) $x-2-\dfrac{8}{3(x-2)}+\dfrac{5}{3(x+4)}$ (2) $\dfrac{9}{5(2x-1)}-\dfrac{11}{5(3x+1)}$ (3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-x+2}{x^2-x+1}$

(4) $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}+\dfrac{1}{4(x+1)}$ (5) $\dfrac{x}{2(x^2+1)^2}+\dfrac{-x+2}{4(x^2+1)}+\dfrac{x-2}{4(x^2+3)}$

29 (1) $(-1)^n n!\left(\dfrac{3}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{2}{(x-1)^{n+1}}\right)$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{x^3-9}{x^2-5x+6} = x+5+\dfrac{18}{x-3}+\dfrac{1}{x-2} & (n=0) \\ 1-\dfrac{18}{(x-3)^2}-\dfrac{1}{(x-2)^2} & (n=1) \\ (-1)^n n!\left(\dfrac{18}{(x-3)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}\right) & (n \geq 2) \end{cases}$$

(3) $(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{36(x-5)^{n+1}}-\dfrac{n+1}{6(x+1)^{n+2}}-\dfrac{1}{36(x+1)^{n+1}}\right)$

30* $-120\left(\dfrac{1}{(x-i)^6}+\dfrac{1}{(x+i)^6}\right) = \dfrac{-240(x^6-15x^4+15x^2-1)}{(x^2+1)^6}$

31* (1) $3e^{\pi i}$ (2) $e^{\pi i/2}$ (3) $5e^{i\theta}$ $\left(\theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$

32* 略

33* 問 26(9) 参照

第 2 章

1 (1) 収束 (2) 収束 (3) 発散 (4) 収束 (5) 収束 (6) 収束 $(c<1)$, 発散 $(c>1)$

2* ヒント: $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k) \quad (k \ge n_0)$

3 (1) 収束 $(s>1)$, 発散 $(s \le 1)$ (2) 発散 (3) 収束

4 (1) 0 (2) 1 (3) $+\infty$ (4) 1 (5) e (6) $\sqrt{2}$ (7) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (8)* 1

5 (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)^n x^n \quad \left(|x|<\frac{4}{3}\right)$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)\,x^n \quad \left(|x|<\frac{1}{2}\right)$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$ (5) $\displaystyle\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (|x|<1)$ (8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1)$

6 (1) $16+32(x-2)+24(x-2)^2+8(x-2)^3+(x-2)^4$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4^{n+1}}-\frac{1}{5^{n+1}}\right)(x-2)^n \quad (-2<x<6)$

(3) $\displaystyle\log 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n \quad (0<x<4)$

7 (1) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{23}{48}x^3+\cdots$ (2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{3}{16}x^3+\cdots$ (3) $x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x^3+\cdots$

8 (1) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & (n=2m)\\ (-1)^m(2m)! & (n=2m+1)\end{cases}$ なお 1 章の問題 27 も参照.

(2) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & (n=2m)\\ (-1)^m(2m+1)! & (n=2m+1)\end{cases}$

9 (1) -840 (2) 2520

第 3 章

1 (5) を除いて, c は 0 と x との間にある数である.

(1) $1-\dfrac{x^2}{2\,!}+\dfrac{x^4}{4\,!}-\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)\,!}+(-1)^{m+1}\dfrac{\sin c\cdot x^{2m+1}}{(2m+1)\,!}$

(2) $n=2m-1$ とすれば

$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)\,!}+(-1)^m\dfrac{\sin c\cdot x^{2m}}{(2m)\,!}$

また $n=2m$ とすれば

$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)\,!}+(-1)^m\dfrac{\cos c\cdot x^{2m+1}}{(2m+1)\,!}$

(3) $1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!}x^2+\cdots+\dbinom{\alpha}{n}x^n+\dbinom{\alpha}{n+1}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

(4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}x+\cdots+(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n+(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{(c+1)^{n+2}}-\dfrac{1}{(c+2)^{n+2}}\right)x^{n+1}$

(5) $\log 3+\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{(x-2)^2}{2\cdot 3^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 3^n}+(-1)^n\dfrac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\cdot(c+1)^{n+1}}$ （c は 2 と x との間にある数）

(6) $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}-\dfrac{5x^4}{128\left(\sqrt{1+c}\right)^7}$　　(7) $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{c(1-c^2)}{(1+c^2)^4}x^4$

(8) $1+x-x^2-\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{1}{3}e^c(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}c-\cos\sqrt{3}c)x^4$

2 (1) 1.0192 （$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{5}},\ a=0,\ n=2$ にテイラーの定理を適用）

(2) 10.07936 （(1) と同様に $\sqrt[3]{1.024}$ の近似値を求め 10 倍）

(3) 0.0953 （$f(x)=\log(1+x),\ a=0,\ n=3$ にテイラーの定理を適用）

3 1(7) で $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とせよ.

4 (1) $\sqrt{2}$　(2) 0　(3) 0　(4) 1　(5) -1　(6) 1　(7) 1　(8) $\sqrt{ab}$

(9) a（$a\geq b$ のとき）, b（$a<b$ のとき）　(10) $-\dfrac{1}{15}$　(11) $-\dfrac{1}{6}$　(12) $\dfrac{1}{6}$　(13) $-\dfrac{5}{12}$

5 (1) $-\infty$　(2) 0

第 4 章

積分定数を省略する.

1 (1) $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}2x$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{3}{2}}(x+2)$ (3) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+\tan^{-1}x$

(4) $\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x$ (5) $\dfrac{5}{8}\log|x-3|-\dfrac{3}{4}\log|x-1|+\dfrac{1}{8}\log|x+1|$

(6) $\dfrac{1}{x-3}+\log\left|\dfrac{x-5}{x-3}\right|$ (7) $\dfrac{1}{8}\tan^{-1}(x-1)+\dfrac{1}{8}\tan^{-1}(x+1)+\dfrac{1}{16}\log\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}$

(8) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{2+\cos x}{\cos x}\right|$ (9) $\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|\left(=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$

(10) $\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\log\left(\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)^2+1\right)-\dfrac{x}{2}\left(=\log\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{x}{2}\right)$

(11) $-\dfrac{2}{\tan\dfrac{x}{2}+3}$ (12) $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{1}{4}\left(\tan\dfrac{x}{2}+3\right)$ (13) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|$

(14) $\log(x+2+\sqrt{2x-1})-\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{2}$

(15) $\dfrac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+2\log(\sqrt{x}+1)+4\tan^{-1}\sqrt[4]{x}$

2* $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{px+q}{rx+s}}\right)dx=\int R\left(\frac{st^n-q}{-rt^n+p},t\right)\frac{n(ps-qr)t^{n-1}}{(-rt^n+p)^2}\,dt$

3 (1) $\sin^{-1}\dfrac{x-a}{a}$ (2) $-\sqrt{a^2-x^2}$ (3) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}-A\log(x+\sqrt{x^2+A})\right)$

(4) $\dfrac{2}{A-\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)^2}\left(=\dfrac{-1}{x\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)}=\dfrac{x-\sqrt{x^2+A}}{Ax}=\dfrac{1}{A}-\dfrac{\sqrt{x^2+A}}{Ax}\right)$

(5) $\dfrac{1}{a}\log\left|\tan\dfrac{1}{2}\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)\right|\left(=\dfrac{1}{2a}\log\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

(6) $\sqrt{x^2+6x+10}-3\log\left(x+3+\sqrt{x^2+6x+10}\right)$

4 (1) $f_n(x)=\displaystyle\int_0^x(\cos t)^n dt$ $(n\in\mathbb{Z})$ は漸化式 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin x(\cos x)^{n-1}+\dfrac{n-1}{n}f_{n-2}(x)$ $(n\neq 0)$ をみたす. $\displaystyle\int(\cos x)^5dx=f_5(x)+C=\frac{1}{15}\sin x\left(3(\cos x)^4+4(\cos x)^2+8\right)+C$

(2) (1) の記号で $\displaystyle\int\frac{dx}{(\cos x)^4}=f_{-4}(x)+C=\frac{1}{3}\left(2\tan x+\frac{\sin x}{(\cos x)^3}\right)+C$

(3) $f_n(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{(\log t)^n}{\sqrt{t}}\,dt$ $(n\in\mathbb{N})$ は漸化式 $f_n(x)=2\sqrt{x}(\log x)^n-2nf_{n-1}(x)$ $(n\geq 1)$ をみたす. $\displaystyle\int\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}\,dx=f_3(x)+C=2\sqrt{x}\left((\log x)^3-6(\log x)^2+24\log x-48\right)+C$

5 (1) $\dfrac{1}{k-1}$ $(k>1)$, $+\infty$ に発散 $(k\leq 1)$ (2) $\dfrac{(b-a)^{1-k}}{1-k}$ $(k<1)$, $+\infty$ に発散 $(k\geq 1)$ (3) $\dfrac{\pi}{2}$

(4) $\dfrac{1}{3}\log 4$ (5) $\dfrac{\pi}{6}$ (6) 1 (7) $-\infty$ に発散 (8) -4

6 比較定理と前問 (1),(2) の結果を利用する. かっこ内は比較する関数の例

(1) 収束 $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$　(2) 発散 $\left(\dfrac{1}{ex\sqrt{x}}\right)$　(3) 収束 $\left(\dfrac{2}{x\sqrt{x}}\right)$　(4) 収束 $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$　(5) 収束 $\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\right)$

7 (1) x^{p-1} が優関数の例.　(2) e^{-x} が優関数の例.　(3) 定理 4.12 および (1),(2) より.

なお $p>1$ の場合にも収束を示すことができ, 結局 (3) の広義積分は全ての $p>0$ について収束することがわかる. その正体については 4.3 節で詳しく扱う.

8* 積分区間を二つに分けて考える. 左側では $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 右側では $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ がそれぞれ優関数.

9 (1) 定理 2.14 の (1)⇒(2) の証明より不等式の左半分, (2)⇒(1) の証明より不等式の右半分.　(2) 略

10 置換 $s^2=t$ による.

11 $\dfrac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}$

12 (1) $\dfrac{1}{\alpha k^{\frac{p}{\alpha}}}\Gamma\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$　(2) $\dfrac{1}{\alpha^p}\Gamma(p)$　(3) $(b-a)^{p+q-1}B(p,q)$　(4) $\dfrac{(b-a)^{p+q-1}}{(b-c)^p(a-c)^q}B(p,q)$

(5) $\dfrac{1}{\alpha}B\left(\dfrac{p}{\alpha},q\right)$　(6) $\dfrac{1}{2}B(p,q)$　(7) $\dfrac{1}{\alpha}B\left(\dfrac{p}{\alpha},q-\dfrac{p}{\alpha}\right)$

13 (1) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{12\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{3}{128}\sqrt{\pi}$　(3) $\dfrac{27\pi}{16\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$　(5) $\dfrac{5}{4096}\pi$　(6) $\dfrac{5}{27\sqrt{3}}\pi$

14 (1) $e-e^{-1}\,(=2\sinh 1)$　(2) $\dfrac{14}{3}$　(3) $2-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)}\left(=2-\sqrt{2}+\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$

(4) $6a$　(5) $2\sqrt{10}-\sqrt{2}\log\left(\sqrt{5}-2\right)\left(=2\sqrt{10}+\sqrt{2}\log\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$

(6) $\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\dfrac{1}{2}\log\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)$　(7) $\dfrac{\sqrt{a^2+1}(e^{2\pi a}-1)}{a}$

15* (1) $8(a+b)$　(2) $8(a-b)$

$a=b$ の場合の外サイクロイドはカージオイド, $a=4b$ の場合の内サイクロイドはアステロイド.

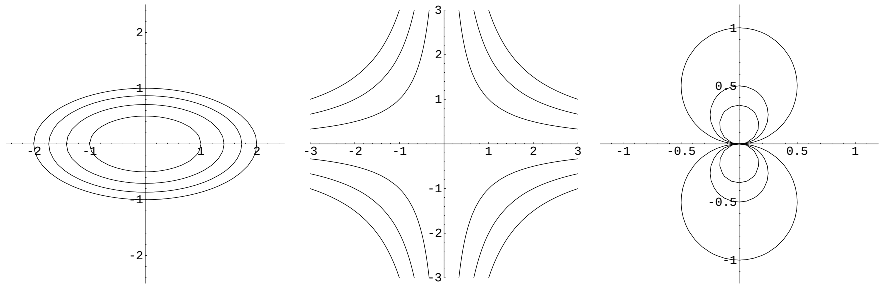
16* (1) $\dfrac{a}{n}B\left(\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2}\right)$　(2) $\dfrac{a^2}{2n}B\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{2}\right)$

$n=1$ の場合は円であり, $n=2$ の場合は連珠形（レムニスケート）とよばれる.

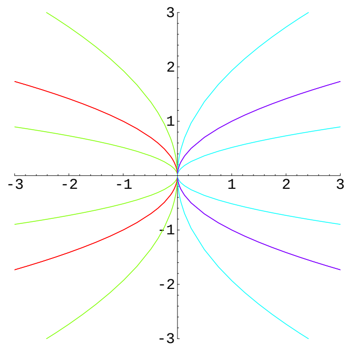
17 (1) $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$　(2) $\dfrac{64a^2\pi}{3}$

第 5 章

1 左より (1),(2),(3)



2 等位線は下のとおり．f は原点で連続でない．



3*参考として例題 5.3 の f も載せておく．

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	参考
連続	○	×	×	○	○	×	○
x について偏微分可能	×	○	×	○	○	○	○
y について偏微分可能	×	○	○	○	○	○	○
方向微分可能	×	△	△	△	○	○	○
全微分可能	×	×	×	×	○	×	×

方向微分可能性については, 記号の意味は次の通り．×: あらゆる方向で不可能, △: 可能な方向と不可能な方向がある, ○: あらゆる方向で可能.

4 f_x, f_y, f_{xx}, $f_{xy} = f_{yx}$, f_{yy} の順に記す．

(1) $\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(2) $\dfrac{-2y}{(x-y)^2}$, $\dfrac{2x}{(x-y)^2}$, $\dfrac{4y}{(x-y)^3}$, $\dfrac{-2(x+y)}{(x-y)^3}$, $\dfrac{4x}{(x-y)^3}$.

(3) $2xye^{x^2y}$, $x^2e^{x^2y}$, $(2y+4x^2y^2)e^{x^2y}$, $(2x+2x^3y)e^{x^2y}$, $x^4e^{x^2y}$.

(4) $xy\cos(xy)+\sin(xy)$, $x^2\cos(xy)$, $2y\cos(xy)-xy^2\sin(xy)$, $2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)$, $-x^3\sin(xy)$.

(5) $\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $\dfrac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$, $\dfrac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

(6) yx^{y-1}, $x^y \log x$, $y(y-1)x^{y-2}$, $(1+y\log x)x^{y-1}$, $x^y(\log x)^2$.

5 $f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}=f_{yx}, f_{yz}=f_{zy}, f_{zx}=f_{xz}$ の順に記す.

(1) y^2z^3, $2xyz^3$, $3xy^2z^2$, 0, $2xz^3$, $6xy^2z, 2yz^3, 6xyz^2, 3y^2z^2$.

(2) $y+z$, $z+x$, $x+y$, 0, 0, 0, 1, 1, 1.

(3) $\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}$ $\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{2(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{2(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{2(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$,
$\dfrac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{-4zx}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

(4) 三角関数には関係式がいろいろあるため, 表記は一意的でない. 以下は解答の一例である.
$\cos(y-z)\sin(-2x+y+z)$, $\cos(z-x)\sin(x-2y+z)$, $\cos(x-y)\sin(x+y-2z)$,
$-2\cos(y-z)\cos(-2x+y+z)$, $-2\cos(z-x)\cos(x-2y+z)$, $-2\cos(x-y)\cos(x+y-2z)$,
$\cos 2(x-y)$, $\cos 2(y-z)$, $\cos 2(z-x)$.

6* $\boldsymbol{u}$ 方向に方向微分可能であることと $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分可能であることとは同値. また $\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v}$ $(k\neq 0)$ とすれば, 方向微分係数の間にも k 倍の関係がある.

7 (1) 接平面は $z=6x+8y-25$, 法線は $\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y-4}{8}=-z+25$.

(2) 接平面は $z=-3y-1$, 法線は $x=1, \dfrac{y+1}{3}=z-2$.

(3) 接平面は $z=x-y-1$, 法線は $x-2=-y+1=-z$.

(4) 接平面は $z=-\pi x-y+2\pi$, 法線は $\dfrac{x-1}{\pi}=y-\pi=z$.

(5) 接平面は $16x+12y-125z+75=0$, 法線は $\dfrac{125(x-3)}{16}=\dfrac{125(y+4)}{12}=-z+\dfrac{3}{5}$.

8 $x_0x+y_0y+z_0z=r^2$ （$z_0>0$ であれば曲面 $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ の接平面として求める）

9 略

10 (1) $f=g(r) \iff \dfrac{\partial f}{\partial\theta}=0$ (2) $f=g(\theta) \iff \dfrac{\partial f}{\partial r}=0$

11 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ (2) 0 (3) $6(x+y)$ (4) 0 (5) $\dfrac{8}{x^2+y^2}$ (6) 0

12 連鎖律と逆変換の微分公式による. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ の順に記す.

(1) $\dfrac{1}{aq-bp}\left(q\dfrac{\partial z}{\partial s}-p\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$, $\dfrac{1}{aq-bp}\left(-b\dfrac{\partial z}{\partial s}+a\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$, $\dfrac{1}{(aq-bp)^2}\left(q^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}-2pq\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}+p^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$,
$\dfrac{1}{(aq-bp)^2}\left(-bq\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}+(aq+bp)\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}-ap\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$, $\dfrac{1}{(aq-bp)^2}\left(b^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}-2ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}+a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$

(2) $\dfrac{1}{s-t}\left(s\dfrac{\partial z}{\partial s}-t\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$, $\dfrac{1}{s-t}\left(-\dfrac{\partial z}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$,
$\dfrac{1}{(s-t)^2}\left(s^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}-2st\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}+t^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+\dfrac{2st}{(s-t)^3}\left(-\dfrac{\partial z}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$,
$\dfrac{1}{(s-t)^2}\left(-s\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}+(s+t)\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}-t\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+\dfrac{s+t}{(s-t)^3}\left(\dfrac{\partial z}{\partial s}-\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$,
$\dfrac{1}{(s-t)^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+\dfrac{2}{(s-t)^3}\left(-\dfrac{\partial z}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}e^{-s}\cos t-\dfrac{\partial z}{\partial t}e^{-s}\sin t,\ \dfrac{\partial z}{\partial s}e^{-s}\sin t+\dfrac{\partial z}{\partial t}e^{-s}\cos t,$

$e^{-2s}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}(\cos t)^2-\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}\sin 2t+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}(\sin t)^2-\dfrac{\partial z}{\partial s}\cos 2t+\dfrac{\partial z}{\partial t}\sin 2t\right),$

$\dfrac{e^{-2s}}{2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}\sin 2t+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}\cos 2t-\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\sin 2t-2\dfrac{\partial z}{\partial s}\sin 2t-2\dfrac{\partial z}{\partial t}\cos 2t\right),$

$e^{-2s}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}(\sin t)^2+\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}\sin 2t+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}(\cos t)^2+\dfrac{\partial z}{\partial s}\cos 2t-\dfrac{\partial z}{\partial t}\sin 2t\right)$

13 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\left(y-\dfrac{\pi}{6}\right)+(1-\sqrt{3})\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2+\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{4}(x+\sqrt{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(y-1)+\dfrac{\sqrt{3}}{16}(x+\sqrt{3})^2+\dfrac{1}{8}(x+\sqrt{3})(y-1)-\dfrac{\sqrt{3}}{16}(y-1)^2$

14 (1) 停留点 $(2,1)$, 極値なし　(2) 停留点 $(0,0),\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, 極大値 $f(0,0)=0$

(3) 停留点 $(0,0),(0,-2)$, 極小値 $f(0,0)=0$　(4) 停留点 $(0,0),\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$, 極小値 $f\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)=-\dfrac{27}{16}$

(5) 停留点 $(0,0),(0,-1),(1,0),\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$, 極大値 $f(\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}$

(6) 停留点 $(0,0),(\pm1,\pm2)$, 極小値 $f(\pm1,\pm2)=-1$　(7) 停留点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$, 極大値 $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{432}$

(8) 停留点 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$, 極値なし　(9) 停留点 $(-1,-1)$, 極小値 $f(-1,-1)=9$

(10) 停留点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$, 極小値 $f\left(2,\dfrac{1}{2}\right)=3-\log 4$　(11) 停留点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 極値なし

(12) 停留点 $(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$, 極小値 $f(0,0)=0$, 極大値 $f(0,\pm1)=2e^{-1}$

(13) 停留点 $(0,0)$, 極値なし　(14) 停留点 $(n\pi,-(-1)^n)\ (n\in\mathbb{Z})$, 極値なし

(15) 周期性より $-\pi<x\leq\pi,\ -\pi<y\leq\pi$ の範囲の停留点を調べれば充分.

停留点 $(0,0),\ (0,\pi),\ \left(\pm\dfrac{\pi}{3},\mp\dfrac{\pi}{3}\right),(\pi,0),\ (\pi,\pi)$

極大値 $f\left(\pm\dfrac{\pi}{3},\mp\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$, 極小値 $f(\pi,\pi)=-3$

(16) 周期性より $-\pi<x\leq\pi,\ -\pi<y\leq\pi$ の範囲の停留点を調べれば充分.

停留点 $(0,0),(0,\pi),\left(\pm\dfrac{\pi}{3},\pm\dfrac{\pi}{3}\right),\left(\pm\dfrac{\pi}{3},\mp\dfrac{2\pi}{3}\right),\left(\pm\dfrac{2\pi}{3},\pm\dfrac{2\pi}{3}\right),\left(\pm\dfrac{2\pi}{3},\mp\dfrac{\pi}{3}\right),(\pi,0),(\pi,\pi)$

極大値 $f(0,0)=f\left(\pm\dfrac{2\pi}{3},\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)=2$, 極小値 $f\left(\pm\dfrac{\pi}{3},\mp\dfrac{2\pi}{3}\right)=f(\pi,0)=-2$

15* (1) 極値をとらない $\left(f(x,y)=f_3(x,y)+O(\|\boldsymbol{x}\|^5),\ f_3(x,y)=\dfrac{x^2y+xy^2}{2}\right)$

[別解] 例 5.5 に倣って $f(t,t)$ を考えよ.

(2) 極小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる $\left(f(x,y)=\dfrac{1}{2}+f_4(x,y)+O(\|\boldsymbol{x}\|^6),\right.$

$\left.f_4(x,y)=\dfrac{x^4+6x^2y^2+y^4}{48},\ f_4(r\cos\theta,r\sin\theta)=\dfrac{r^4\left(1+(\sin 2\theta)^2\right)}{48}\geq\dfrac{r^4}{48}\right)$

(3) 極値をとらない（一変数関数 $f(x,0)$ を考えよ）

16 (1) 極大値をとる　(2) 極小値をとる

17 (1) 正三角形の場合.（面積の 2 乗を二辺の長さの二変数関数とみて停留点を求める）

(2) $(x,y)=\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i,\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$ （与えられた n 点の重心）

(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\left(f(x,y)=x^2+(y-2)^2+\left(x^2+y^2-\dfrac{1}{2}\right)^2\text{ を調べる}\right)$

(4) 直線を $y=px+q$ とおけば, 三点からの距離の 2 乗の和 $f(p,q)$ は

$$f(p,q)=\frac{(-1+q)^2+(p-2+q)^2+(2p+q)^2}{p^2+1}$$

停留点 $(p,q)=(1,0),(-1,2)$ における f の値を比較し, 求める直線の方程式は $y=-x+2$

18 (1) $y=\dfrac{5x+2}{7}$ (2) $y=1$ (3) $y=\dfrac{x+17}{9}$ (4) $y=(1-e^2-\pi)x+1$

19 (1) $y'=\dfrac{2x-y}{x-2y},\ y''=\dfrac{18}{(x-2y)^3}$ (2) $y'=-\dfrac{x^{n-1}}{y^{n-1}},\ y''=-\dfrac{4(n-1)x^{n-2}}{y^{2n-1}}$

(3) $y'=-\dfrac{1+\cos(x+y)}{2+\cos(x+y)},\ y''=\dfrac{\sin(x+y)}{(2+\cos(x+y))^3}$

(4) $y'=\dfrac{x(y-x)}{2x^2+xy+y^2},\ y''=\dfrac{(y-3x)(x+y)^2(x^2+y^2)}{(2x^2+xy+y^2)^3}$

20 (1) $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ において極小値 $\dfrac{2}{3}$ を, $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ において極大値 $-\dfrac{2}{3}$ をとる. （図 1）

(2) $(-2,2)$ において極大値 2 をとる. （図 2）

(3) $(-1,1)$ において極小値 1 を, $(\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{9})$ において極大値 $\sqrt[3]{9}$ をとる. （図 3）

(4) $\left(\dfrac{1-\log 2}{2},-\dfrac{1+\log 2}{2}\right)$ において極大値 $-\dfrac{1+\log 2}{2}$ をとる. （図 4）

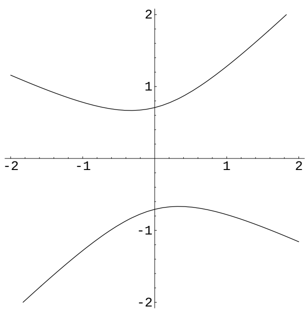


図 1: $x^2+xy-2y^2+1=0$

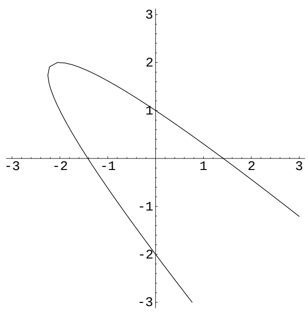


図 2: $x^2+2xy+y^2+y=2$

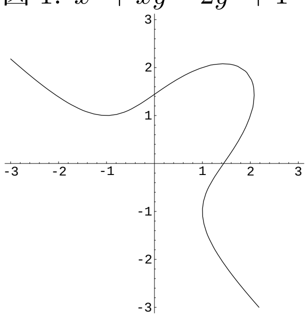


図 3: $x^3+y^3-3xy-3=0$

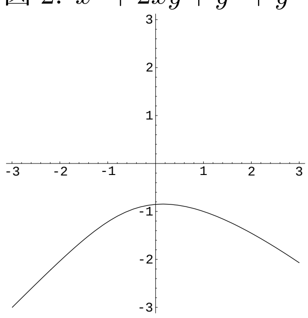


図 4: $2e^{x+y}-x+y=0$

21 (1) 極小値 $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 極大値 $f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) 極小値 $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, 極大値 $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(3) 極小値 $f(\pm\sqrt{6}, \mp\sqrt{3}) = 18$, 極大値 $f(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6}) = 45$

(4) 極小値 $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -2$, 極大値 $f\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 3$

(5)* 極小値 $f(1,1) = 2$, $f(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}) = 2(1-\sqrt{3})^2$, 極大値 $f(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}) = 2(1+\sqrt{3})^2$

22 $\sqrt{\dfrac{7}{8}}$ （条件 $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$ の下で $(x-1)^2 + (y-1)^2$ の極値を求める）

第 6 章

1 (1) $\dfrac{25}{6}$ (2) $18\log 6 - 25\log 5 + 8\log 4 - \dfrac{3}{2}\left(= \log\dfrac{2^{34}\cdot 3^{18}}{5^{25}} - \dfrac{3}{2}\right)$ (3) $\dfrac{8\sqrt{2}-10}{3}$

(4) $\dfrac{\pi}{2} - 1$ (5) $\dfrac{\pi^2}{8}$ (6) $\dfrac{8a^3}{3}$ (7) $1 - e^{-1} + e^{-2}$ (8) $\dfrac{3}{8}$ (9) $e - e^{-1}$ (10) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

2 (1) $\displaystyle\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}/2}^{\sqrt{4-y^2}/2} f(x,y)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{x^2/4}^{x} f(x,y)\,dy$

(3) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^0 dx \int_0^{x+2} f(x,y)\,dy + \int_0^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy$

3 積分順序を交換して計算する.

(1) $\dfrac{4}{3}$ (2) $\dfrac{3(e-1)}{2}$

4 (1) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = 2(s^2+t^2)$ (2) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr$

5 (1) $\pi(1-e^{-1})$ (2) $\dfrac{3\pi}{8}$ (3) π (4) $\dfrac{4\pi}{3}$ (5) $\dfrac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$ (6) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

(7) $\dfrac{4}{9}$ （極座標変換で $E = \{(r,\theta)\,|\,0 \leq r \leq \cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ が D に写る）

(8)* $\dfrac{4}{3}$ （極座標変換で $E = \{(r,\theta)\,|\,0 \leq r \leq 1+\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ が D に写る）

(9)* $\dfrac{16\sqrt{2}}{105}$ （極座標変換で $E = \{(r,\theta)\,|\,0 \leq r \leq \cos 2\theta,\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$ が D に写る）

6 かっこ内は変数変換の例.

(1) $e^2 - 1$ $(s = x-y,\ t = x+y)$ (2) $e - e^{-1}$ $(s = x-y,\ t = x+y)$

(3) 6π $(x = 2r\cos\theta,\ y = 3r\sin\theta)$ (4) $\dfrac{2}{5}$ $(s = -3x+2y,\ t = -x+4y)$

(5) $\dfrac{\pi}{8}$ $(x+y = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$

7 (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{9}{10}(\sqrt[3]{4}-1)$ (3) $\sqrt{2}\pi$ (4) π

8 (1) $a > 2,\ \dfrac{1}{(a-2)(a-1)}$ (2) $a < 1,\ \dfrac{\pi}{1-a}$

9 (1) π (2) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ （ヒント: 変数変換 $s = 2x,\ t = \sqrt{3}y$）

(3) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ （ヒント: 変数変換 $s = x - \dfrac{y}{2},\ t = y$）

10* (1) $\dfrac{\pi^2}{8}$ (2) $\dfrac{\pi^2}{4}$

11 (1) 25 (2) $\dfrac{15}{2}$ (3) 5π

12 略

13 (1) $\dfrac{\pi a^4}{16}$ (2) $\dfrac{4\pi a^5}{5}$

14* 略

15* (1) $\dfrac{\pi^2 r^4}{2}$ (2) $\dfrac{8\pi^2 r^5}{15}$

附録 A

1 (1) $y = Ce^{\alpha x}$ (2) $y = Cx^{\alpha}$ (3) $y = Ce^{\cos x}$ (4) $y = Ce^{-x^2} + x^2 - 1$

(5) $y = C\cos x + \sin x$

2 (1) $y^2 = \dfrac{1}{C - 4x^3}$ (2) $\sin y = Ce^{-\cos x}$ (3) $y = \dfrac{2}{3\log(x^2+1) + C}$

(4) $y = \sqrt{5}\tan\left(\sqrt{5}\log\left(x + \sqrt{x^2+3}\right) + C\right)$

3 (1) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$ (2) $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$ (3) $y = e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x)$

4 (1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2 + 3x + 1$

(2) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \dfrac{e^{5x}}{6}$

(3) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - xe^{2x}$

(4) $y = e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x) - \dfrac{6\cos 3x + \sin 3x}{37}$

(5) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \dfrac{x\cos 3x}{3}$

5 $y_1(x)z'' + (p(x)y_1(x) + 2y_1'(x))z' = r(x)$ に帰着. $y = C_1x^3 + C_2e^x$

6 $z' = \dfrac{f(z) - z}{x}$ に帰着. $\log\left|(y-x)(y^2 + 2xy + 3x^2)\right| = \sqrt{2}\tan^{-1}\dfrac{x+y}{\sqrt{2}\,x} + C$

7 $\dfrac{dY}{dX} = f\left(\dfrac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right)$ に帰着. $(2x - y - 14)^4(y + 3x - 1) = C$

8 $z' + (1-n)p(x)z + (1-n)q(x) = 0$ に帰着. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 + Ce^{x^3}}}$

9 $z' + (2a(x)y_0(x) + b(x))z + a(x)z^2 = 0$ に帰着. $y = \dfrac{1}{x + Ce^{x^2}} + 1$

10 $y = C_1e^{x^2/2} + C_2e^{x^3/3}$