工学のための最適化手法入門 演習問題解答

第 2 章 1 次元最適化問題

□ 1　円柱の直径を D, 高さを H, 表面積を S, 体積を V とすると, 以下のような最適化問題に記述できる.

$$\left.\begin{aligned}&\text{設計変数}:D, H\\&\text{目的関数}:V=\frac{\pi D^2 H}{4}\to\max\\&\text{制約条件}:S=2\times\frac{\pi D^2}{4}+\pi DH=20\pi\\&\qquad D, H\geq 0\end{aligned}\right\}$$

ここで, 制約条件 $S=20\pi$ より,H を消去する.

$$\begin{aligned}H&=-\frac{D}{2}+\frac{20}{D}\\\therefore V(D)&=\frac{\pi D^2}{4}\left(-\frac{D}{2}+\frac{20}{D}\right)\\&=-\frac{\pi D^3}{8}+5\pi D\end{aligned}$$

また, 制約条件は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}H=-\frac{D}{2}+\frac{20}{D}&\geq 0\\-D^2+40&\geq 0\\0\leq D&\leq 2\sqrt{10}\approx 6.324\end{aligned}$$

$f(D)=-V(D)$ なる新たな目的関数を設定し, 最大化問題を以下のような最小化問題に記述する.

$$\left.\begin{aligned}&\text{設計変数}:D\\&\text{目的関数}:f(D)=-V(D)=\frac{\pi D^3}{8}-5\pi D\to\min\\&\text{制約条件}:0\leq D\leq 2\sqrt{10}\end{aligned}\right\}$$

初期範囲を $[a,b]=[0,2\sqrt{10}]$ とし, 誤差範囲が 0.01 以下になるまで黄金分割法で探索した結果を表 2.1, 図 1 に示す. $D\approx 3.65$ のとき体積が最大となる. これは, 真の最大値を与える D の値 $D=2\sqrt{10/3}\approx 3.6514837\ldots$ と一致する.

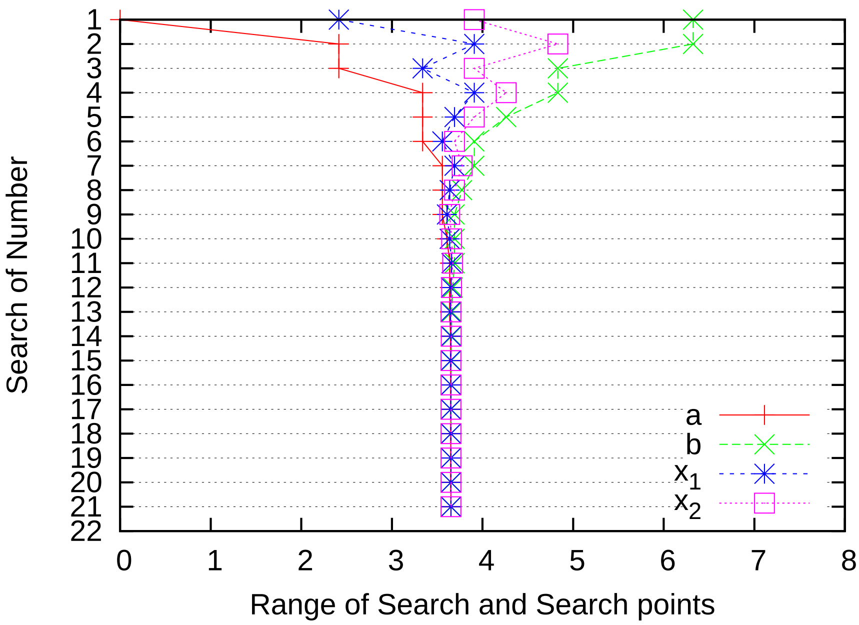


図 1

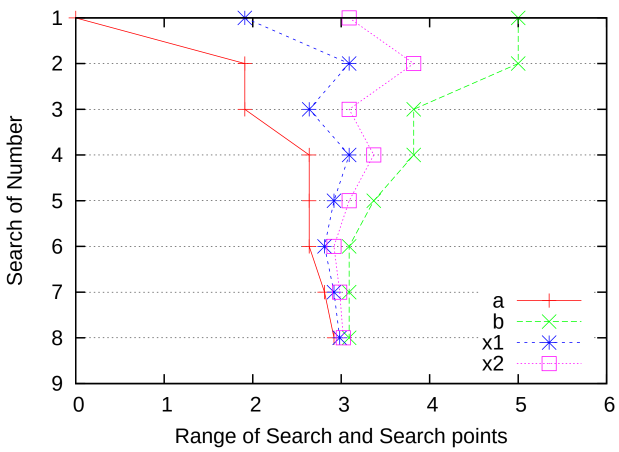
表 2.1

探索回数	探索範囲 a	探索範囲 b	探索点 x_1	探索点 x_2	探索値 $f(x_1)$	探索値 $f(x_2)$	誤差範囲 ε
1	0	7	2.673762	4.326238	-34.493	-36.159	4.326238
2	2.673762	7	4.326238	5.347524	-36.159	-23.948	2.673762
3	2.673762	5.347524	3.695048	4.326238	-38.2301	-36.159	1.652476
4	2.673762	4.326238	3.304952	3.695048	-37.738	-38.2301	1.021286
5	3.304952	4.326238	3.695048	3.936141	-38.2301	-37.8806	0.63119
6	3.304952	3.936141	3.546045	3.695048	-38.1909	-38.2301	0.390097
7	3.546045	3.936141	3.695048	3.787138	-38.2301	-38.1581	0.241093
8	3.546045	3.787138	3.638134	3.695048	-38.2375	-38.2301	0.149004
9	3.546045	3.695048	3.602959	3.638134	-38.2282	-38.2375	0.092089
10	3.602959	3.695048	3.638134	3.659873	-38.2375	-38.2379	0.056914

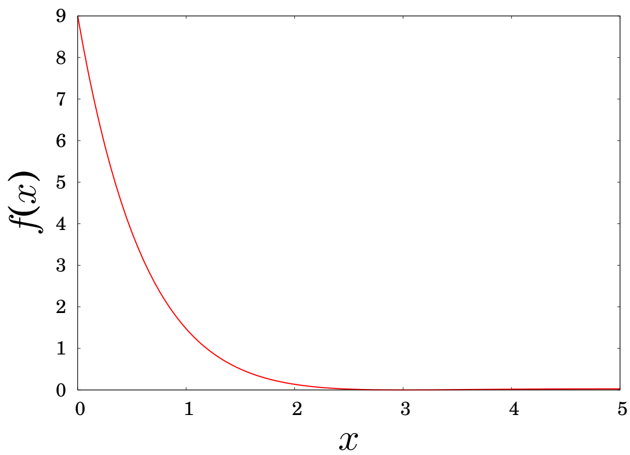
□ **2**　探索の様子を表 2.2, 図 2(a) に示す.

表 2.2

探索回数	探索範囲 a	探索範囲 b	探索点 x_1	探索点 x_2	探索値 $f(x_1)$	探索値 $f(x_2)$	誤差範囲 ε
1	0	5	1.9098301	3.09017	0.176019	0.00037	3.09017
2	1.90983	5	3.0901699	3.81966	0.00037	0.014737	1.90983
3	1.90983	3.81966	2.6393202	3.09017	0.00929	0.00037	1.18034
4	2.63932	3.81966	3.0901699	3.36881	0.00037	0.004683	0.72949
5	2.63932	3.36881	2.9179607	3.09017	0.000364	0.00037	0.45085
6	2.63932	3.09017	2.8115295	2.917961	0.002135	0.000364	0.27864
7	2.811529	3.09017	2.9179607	2.983739	0.000364	1.34E-05	0.172209
8	2.917961	3.09017	2.9837388	3.024392	1.34E-05	2.89E-05	0.106431



(a) 黄金分割法による探索の様子



(b) $f(x) = e^{-x} \times (x-3)^3$ のグラフの概形

図 2

$x \approx 3.00$ のとき最小値をとる．これは, 真の最小値を与える x の値 $x = 3$ と一致する．
図 2(b) に関数の概形を示す.

□ 3　探索の様子を表 2.3, 図 3 に示す.

表 2.3

探索回数	a	b	v	w	x	$f(x)$	探索法
1	0	5	1.9098	1.9098	1.9098	0.176019	黄金分割
2	1.9098	5	1.9098	1.9098	3.0902	0.00037	黄金分割
3	1.9098	3.8197	1.9098	3.8197	3.0902	0.00037	放物線補間
4	1.9098	3.3433	3.8197	3.3433	3.0902	0.00037	黄金分割
5	2.6393	3.3433	2.6393	3.3433	3.0902	0.00037	放物線補間
6	2.6393	3.0902	3.3433	3.0902	3.065	0.000197	放物線補間
7	2.6393	3.065	3.0902	3.065	2.9599	8.33E-05	黄金分割
8	2.8375	3.065	3.0902	3.065	2.9599	8.33E-05	放物線補間
9	2.9599	3.065	3.065	2.9599	3.0003	3.18E-09	放物線補間
10	2.9599	3.0013	2.9599	3.0013	3.0003	3.18E-09	放物線補間
11	2.9599	3.0003	3.0013	3.0003	3	4.69E-11	放物線補間
12	2.9599	3	3.0003	3	3	1.81E-15	放物線補間
13	2.9599	3	3	3	3	1.81E-15	放物線補間

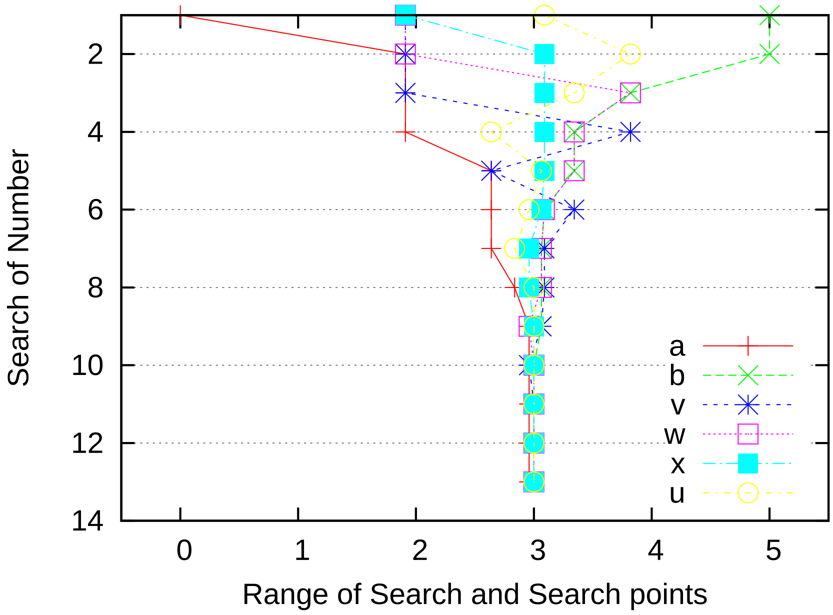


図 3

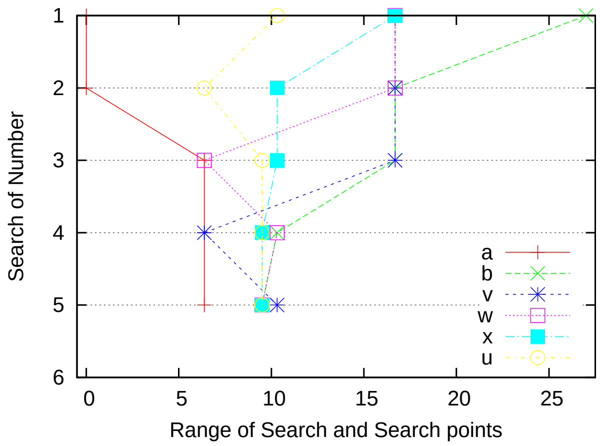
$x \approx 3.00$ のとき最小値をとる．これは, 真の最小値を与える x の値 $x = 3$ と一致する.

□ 4　初期の 3 点を $v=0, w=0, x=0$ として, ブレントの方法で最小化した様子を表 2.4, 図 4(a) に示す. $x \approx -9.5$ の

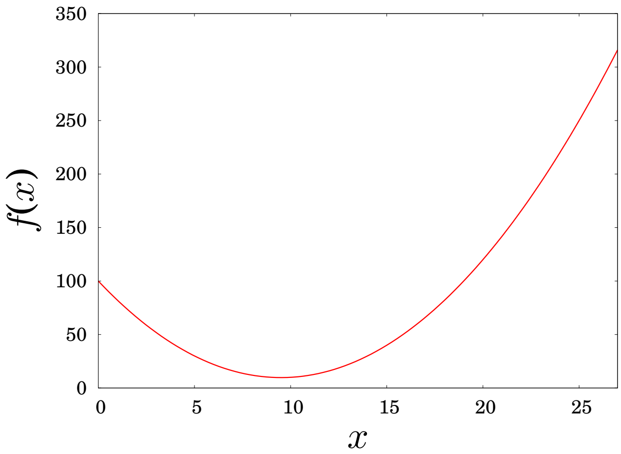
表 2.4

探索回数	a	b	v	w	x	$f(x)$	探索法
1	0	27	16.6899	16.6899	16.6899	61.44465	黄金分割
2	0	16.6899	16.6899	16.6899	10.3149	10.4141	黄金分割
3	6.375	16.6899	16.6899	6.375	10.3149	10.4141	放物線補間
4	6.375	10.3149	6.375	10.3149	9.5	9.75	放物線補間
5	6.375	9.5	10.3149	9.5	9.5	9.75	放物線補間

とき最小となる. これは, 真の最小値を与える x の値 $x=-9.5$ と一致する. 探索の初期では黄金分割法が機能し, 探索の終盤では放物線補間が機能しているのが分かる. また, 例題 2.2 よりも少ない探索回数であるが, 真の値に近く収束しており, ブレントの方法は効率的な探索方法であると確認できる.



(a)



(b)

図 4

図.4(b) に関数の概形を示す.

□ 5

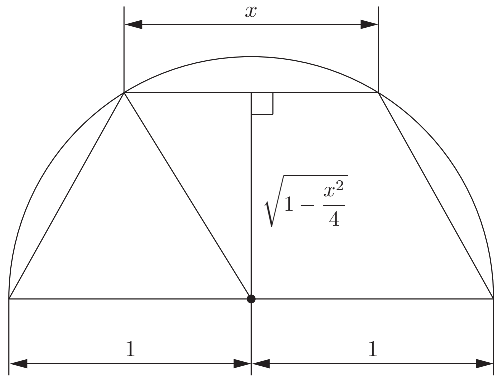


図 5　半円に内接する台形

図 5 のように台形の上底を x とすると, 台形の高さは,$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ である.
そのとき, 面積 S は,

$$S(x) = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

となる. したがって, 以下のような最適化問題に記述できる.

$$\left.\begin{array}{l}\text{設計変数 :}x\\ \text{目的関数 :}S(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}} \to \max\\ \text{制約条件 :}0 \leq x \leq 2\end{array}\right\}$$

$f(x) = -S(x)$ なる新たな目的関数を設定し, 最大化問題を以下のような最小化問題に記述する.

$$\left.\begin{array}{l}\text{設計変数 :}a\\ \text{目的関数 :}f(x) = -S(x) = -\dfrac{1}{2}(x+2)\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}} \to \min\\ \text{制約条件 :}0 \leq a \leq 2\end{array}\right\}$$

この最小化問題を初期範囲 $[a,b]=[0,2]$ として, 最小点を探索する. 黄金分割法により探索した様子を表 2.5, 図 6 に示す. また, ブレントの方法により探索した様子を表 2.6, 図 7 に示す. 探索した結果,$x \approx 1.00$ のとき面積が最大となる. 黄金分割よりもブレントの方法の方が収束も早く効率的である. これは, 真の最大値を与える x の値 $x=1$ と一致する.

表 2.5　黄金分割による探索の様子

探索回数	探索範囲 a	探索範囲 b	探索点 x_1	探索点 x_2	探索値 $f(x_1)$	探索値 $f(x_2)$	誤差範囲 ε
1	0	2	0.76393	1.23607	-1.27718	-1.27202	1.23607
2	0	1.23607	0.47214	0.76393	-1.20113	-1.27718	0.76393
3	0.47214	1.23607	0.76393	0.94427	-1.27718	-1.29773	0.47214
4	0.76393	1.23607	0.94427	1.05573	-1.29773	-1.29766	0.2918

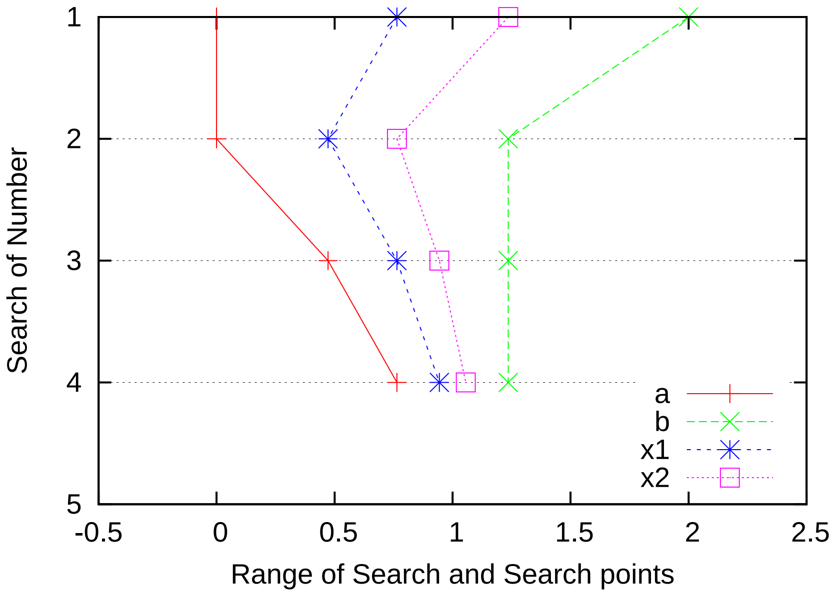


図 6　黄金分割による探索の様子

表 2.6　ブレントの方法による探索の様子

探索回数	a	b	v	w	x	$f(x)$	探索法
1	0	2	0.7639	0.7639	0.7639	-1.28	黄金分割
2	0	1.236	0.7639	1.236	0.7639	-1.28	黄金分割
3	0.4721	1.236	0.4721	1.236	0.7639	-1.28	放物線補間
4	0.7639	1.236	1.236	0.7639	0.9846	-1.30	放物線補間
5	0.9846	1.236	0.7639	0.9846	0.9875	-1.30	放物線補間
6	0.9875	1.236	0.9846	0.9875	1.0015	-1.30	黄金分割
7	0.9875	1.0911	0.9846	0.9875	1.0015	-1.30	放物線補間
8	0.9875	1.0015	0.9875	1.0015	1	-1.30	放物線補間
9	0.9875	1	1.0015	1	1	-1.30	放物線補間
10	1	1	1	1	1	-1.30	放物線補間
11	1	1	1	1	1	-1.30	放物線補間

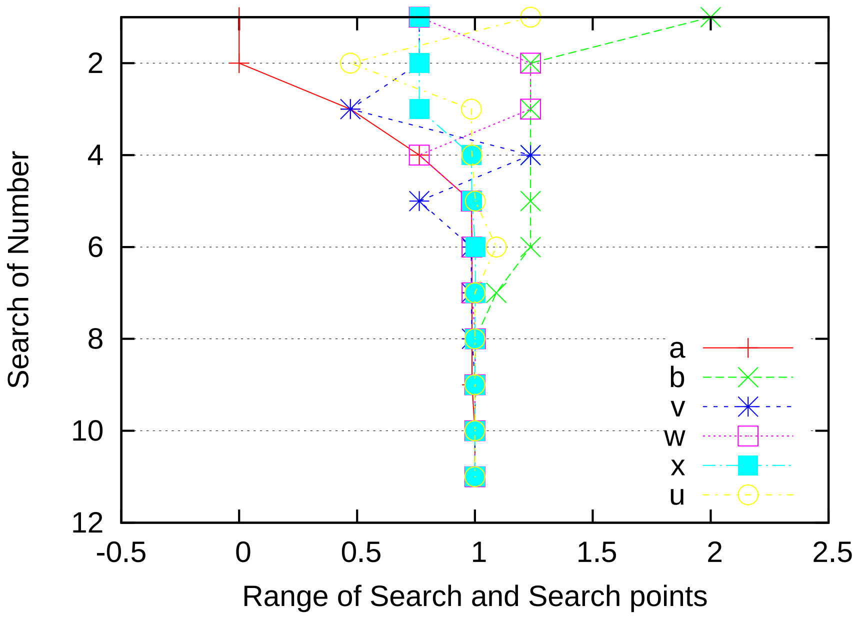


図 7　ブレントの方法による探索の様子

□ 6

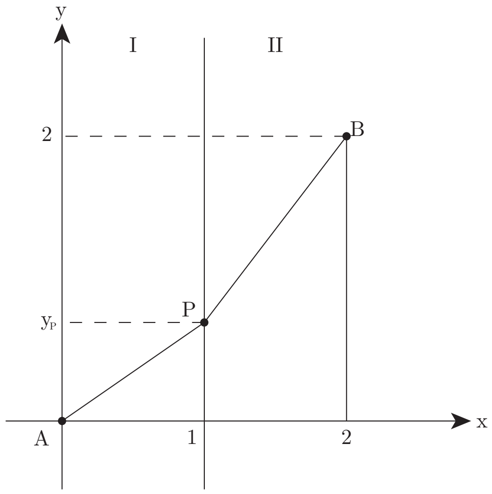


図 8

図 8 のように座標軸を設定し, $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(2,2)$, 界面を $x=1$ とする. 界面の通過点を $\mathrm{P}(1, y_\mathrm{p})$ とすると, AP 間,PB 間の距離 $\overline{\mathrm{AP}}, \overline{\mathrm{PB}}$ は以下のようになる.

$$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{1^2 + y_\mathrm{p}^2}$$
$$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{1^2 + (2 - y_\mathrm{p})^2}$$

媒質 I では速さ 1 で伝わり, 媒質 II では速さ 0.8 で伝わるので, AP 間,PB 間を通過するのにかかる時間 $T_\mathrm{AP}, T_\mathrm{PB}$ は以下のようになる.

$$T_\mathrm{AP} = \sqrt{1^2 + y_\mathrm{p}^2}$$
$$T_\mathrm{PB} = \frac{1}{0.8} \times \sqrt{1^2 + (2 - y_\mathrm{p})^2}$$

したがって, 以下のような最適化問題に記述できる.

$$\left.\begin{array}{l} \text{設計変数 :} y_\mathrm{p} \\ \text{目的関数 :} T(y_\mathrm{p}) = \sqrt{1^2 + y_\mathrm{p}^2} + \dfrac{\sqrt{1^2 + (2 - y_\mathrm{p})^2}}{0.8} \to \min \\ \text{制約条件 :} 0 \leq y_\mathrm{p} \leq 2 \end{array}\right\}$$

この最小化問題を初期範囲 $[a,b] = [0,2]$ として, 黄金分割法により最小点を探索する. その様子を表 2.7, 図 9 に示す.
探索した結果,$y_\mathrm{p} \approx 1.21$ のとき時間が最小となる.

表 2.7

探索回数	探索範囲 a	探索範囲 b	探索点 x_1	探索点 x_2	探索値 $f(x_1)$	探索値 $f(x_2)$	誤差範囲 ε
1	0	2	0.763932	1.236068	3.245816	3.162937	1.236068
2	0.763932	2	1.236068	1.527864	3.162937	3.208342	0.763932
3	0.763932	1.527864	1.055728	1.236068	3.173369	3.162937	0.472136
4	1.055728	1.527864	1.236068	1.347524	3.162937	3.170587	0.291796
5	1.055728	1.347524	1.167184	1.236068	3.163705	3.162937	0.18034
6	1.167184	1.347524	1.236068	1.27864	3.162937	3.16453	0.111456
7	1.167184	1.27864	1.209757	1.236068	3.162748	3.162937	0.068884
8	1.167184	1.236068	1.193496	1.209757	3.162931	3.162748	0.042572
9	1.193496	1.236068	1.209757	1.219807	3.162748	3.162749	0.026311
10	1.193496	1.219807	1.203546	1.209757	3.162792	3.162748	0.016261
11	1.203546	1.219807	1.209757	1.213595	3.162748	3.162739	0.01005
12	1.209757	1.219807	1.213595	1.215968	3.162739	3.162739	0.006211

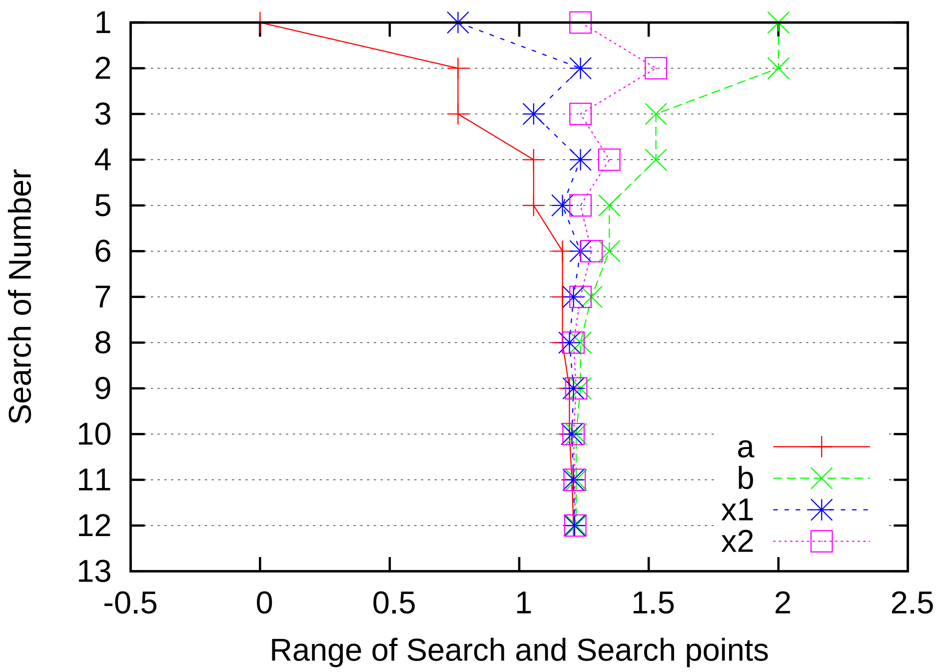
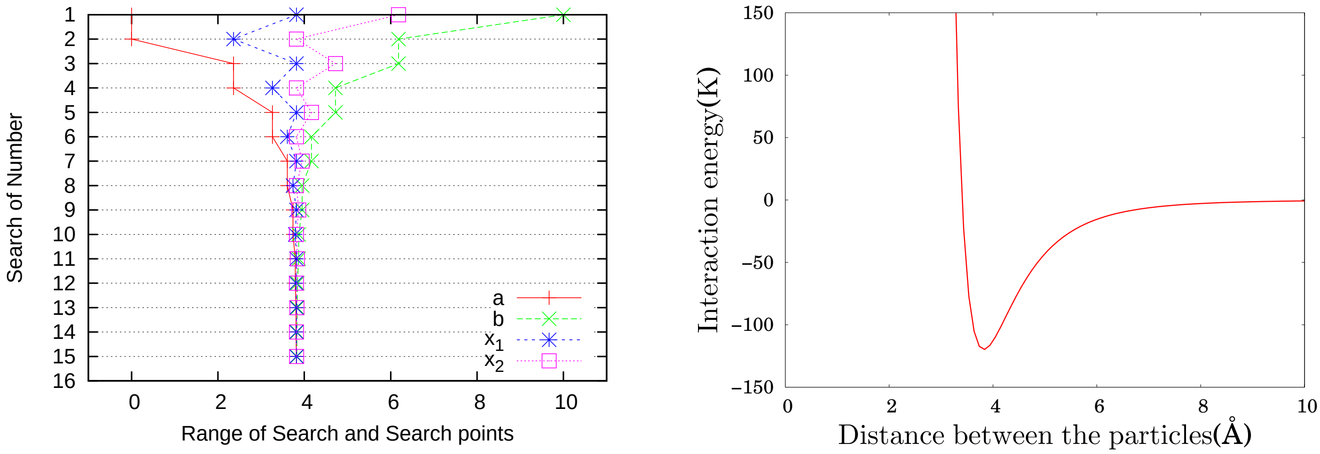


図 9

□ **7** $\varepsilon = 119.8[\mathrm{K}], \sigma = 3.405[\text{Å}]$ として, 黄金分割法により探索を行った. その様子を表 2.8, 図 10(a) に示す.

表 2.8

探索回数	探索範囲 a	探索範囲 b	探索点 x_1	探索点 x_2	探索値 $f(x_1)$	探索値 $f(x_2)$	誤差範囲 e
1	0	10	3.819660113	6.180339887	-119.7983997	-13.02647339	6.180339887
2	0	6.180339887	2.360679775	3.819660113	34542.55326	-119.7983997	6.180339887
3	2.360679775	6.180339887	3.819660113	4.72135955	-119.7983997	-57.93764816	3.819660113
4	2.360679775	4.72135955	3.262379212	3.819660113	181.3126401	-119.7983997	2.360679775
5	3.262379212	4.72135955	3.819660113	4.16407865	-119.7983997	-100.4289605	1.458980338
6	3.262379212	4.16407865	3.60679775	3.819660113	-99.08780661	-119.7983997	0.901699437
7	3.60679775	4.16407865	3.819660113	3.951216287	-119.7983997	-115.8804626	0.5572809
8	3.60679775	3.951216287	3.738353925	3.819660113	-117.3857753	-119.7983997	0.344418537
9	3.738353925	3.951216287	3.819660113	3.8699101	-119.7983997	-119.1781994	0.212862363
10	3.738353925	3.8699101	3.788603912	3.819660113	-119.4501335	-119.7983997	0.131556175
11	3.788603912	3.8699101	3.819660113	3.8388539	-119.7983997	-119.7185147	0.081306188
12	3.788603912	3.8388539	3.8077977	3.819660113	-119.7390186	-119.7983997	0.050249987
13	3.8077977	3.8388539	3.819660113	3.826991487	-119.7983997	-119.7926622	0.0310562
14	3.8077977	3.826991487	3.815129074	3.819660113	-119.7859539	-119.7983997	0.019193787
15	3.815129074	3.826991487	3.819660113	3.822460448	-119.7983997	-119.7999328	0.011862413



(a) 黄金分割による探索の様子

(b) $y = U(r)$ のグラフの概形

図 10

図.10(b) に関数の概形を示す. 探索した結果,$r \approx 3.82[\text{Å}]$ のときポテンシャルエネルギーが最小となる. これは, 真の最小値を与える r の値 $r = \sqrt[6]{2}\sigma \approx 3.822[\text{Å}]$ と一致する.

第 3 章 線形計画問題

□ 1　ごはんを x, 肉を y 食べるとすると, この問題は次のような線形計画問題に記述できる.

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{設計変数}: x, y \\
&\text{目的関数}: f = 100x + 300y \to \min \\
&\text{制約条件}: 10x + 20y \geq 140 \\
&\qquad\qquad\quad 20x + 50y \geq 110 \\
&\qquad\qquad\quad 60x + 10y \geq 120 \\
&\qquad\qquad\quad x, y \geq 0
\end{aligned}\right\}
$$

(図による解法)
図 11 の青い部分は実行可能領域を示しており, 目的関数が最小となるのは $(x, y) = (14, 0)$ のときである.

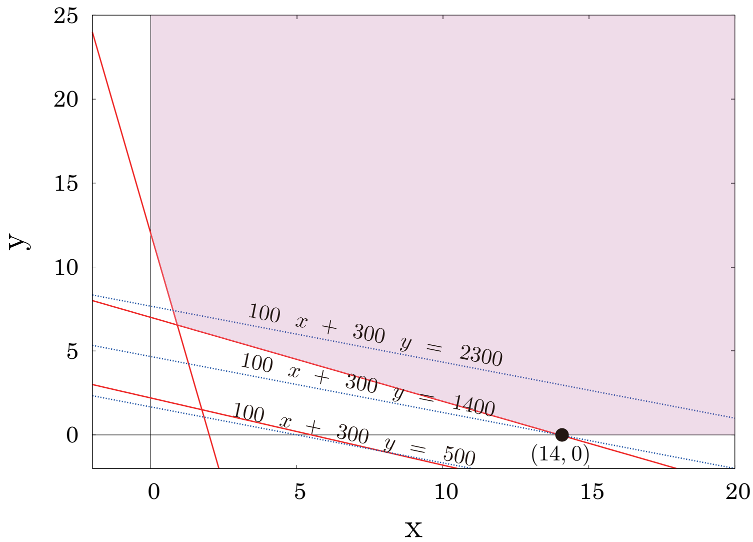


図 11

(シンプレックス法による解法)
まず, スラック変数を導入して標準化する.

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{設計変数}: x, y, u, v, w \\
&\text{目的関数}: f = 100x + 300y \to \min \\
&\text{制約条件}: 10x + 20y - u = 140 \\
&\qquad\qquad\quad 20x + 50y - v = 110 \\
&\qquad\qquad\quad 60x + 10y - w = 120 \\
&\qquad\qquad\quad x, y, u, v, w \geq 0
\end{aligned}\right\}
$$

次に, 初期頂点を求めるために人工変数 s_1, s_2, s_3 を導入する. 初期頂点を求めるための線形計画問題を以下のように設定する.

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{設計変数}: x, y, z, u, v, w, s_1, s_2, s_3 \\
&\text{目的関数}: g = s_1 + s_2 + s_3 \to \min \\
&\text{制約条件}: 10x + 20y - u + s_1 = 140 \\
&\qquad\qquad\quad 20x + 50y - v + s_2 = 110 \\
&\qquad\qquad\quad 60x + 10y - w + s_3 = 120 \\
&\qquad\qquad\quad x, y, u, v, w, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}\right\}
$$

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
s_1	10	20	-1	0	0	1	0	0	140	
s_2	20	50	0	-1	0	0	1	0	110	
s_3	60	10	0	0	-1	0	0	1	120	

g の行の s_1, s_2, s_3 を掃き出す.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	-90	-80	1	1	1	0	0	0	-370	
s_1	10	20	-1	0	0	1	0	0	140	
s_2	20	50	0	-1	0	0	1	0	110	
s_3	60	10	0	0	-1	0	0	1	120	

s_3 の行がピボット行となる.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	-90	-80	1	1	1	0	0	0	-370	
s_1	10	20	-1	0	0	1	0	0	140	14
s_2	20	50	0	-1	0	0	1	0	110	5.5
s_3	60	10	0	0	-1	0	0	1	120	2

x の係数を 1 に規格化する.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	-90	-80	1	1	1	0	0	0	-370	
s_1	10	20	-1	0	0	1	0	0	140	14
s_2	20	50	0	-1	0	0	1	0	110	5.5
x	1	0.167	0	0	-0.017	0	0	0.017	2	2

x 行で掃き出す.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	0	-65	1	1	-0.5	0	0	1.5	-190	
s_1	0	18.333	-1	0	0.167	1	0	-0.167	120	
s_2	0	46.667	0	-1	0.333	0	1	-0.333	70	
x	1	0.167	0	0	-0.017	0	0	0.017	2	

s_2 行がピボット行となる.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	0	-65	1	1	-0.5	0	0	1.5	-190	
s_1	0	18.333	-1	0	0.167	1	0	-0.167	120	6.545
s_2	0	46.667	0	-1	0.333	0	1	-0.333	70	1.5
x	1	0.167	0	0	-0.017	0	0	0.017	2	12

y 行を規格化する.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	0	-65	1	1	-0.5	0	0	1.5	-190	
s_1	0	18.333	-1	0	0.167	1	0	-0.167	120	6.545
y	0	1	0	-0.021	0.007	0	0.021	-0.007	1.5	1.5
x	1	0.167	0	0	-0.017	0	0	0.017	2	12

y 行で掃き出す.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	0	0	1	-0.393	-0.036	0	1.393	1.036	-92.5	
s_1	0	0	-1	0.393	0.036	1	-0.393	-0.036	92.5	
y	0	1	0	-0.021	0.007	0	0.021	-0.007	1.5	
x	1	0	0	0.004	-0.018	0	-0.004	0.018	1.75	

v 行を規格化する.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	0	0	1	-0.393	-0.036	0	1.393	1.036	-92.5	
v	0	0	-2.545	1	0.091	2.545	-1	-0.091	235.455	
y	0	1	0	-0.021	0.007	0	0.021	-0.007	1.5	
x	1	0	0	0.004	-0.018	0	-0.004	0.018	1.75	

v 行で掃き出す.

	x	y	u	v	w	s_1	s_2	s_3	定数項	定数項/列要素
g	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
v	0	0	-2.545	1	0.091	2.545	-1	-0.091	235.455	
y	0	1	-0.055	0	0.009	0.055	0	-0.009	6.545	
x	1	0	0.009	0	-0.018	-0.009	0	0.018	0.909	

最適解は上の表から $v = 235.455, y = 6.545, x = 0.909$ となる. 非基底変数は $u = 0, w = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$ となる. したがって標準化された問題の初期実行可能点は

$$(x, y, u, v, w =) \tag{2.1}$$

である. 次に目的関数 f の最適解を探索する.

	x	y	u	v	w	定数項	定数項/列要素
f	100	300	0	0	0	0	
v	0	0	-2.545	1	0.091	235.455	
y	0	1	-0.055	0	0.009	6.545	
x	1	0	0.009	0	-0.018	0.909	

f の行の x, y を掃き出す.

	x	y	u	v	w	定数項	定数項/列要素
f	0	0	15.455	0	-0.909	-2054.55	
v	0	0	-2.545	1	0.091	235.455	
y	0	1	-0.055	0	0.009	6.545	
x	1	0	0.009	0	-0.018	0.909	

y の行がピボット行となる.

	x	y	u	v	w	定数項	定数項/列要素
f	0	0	15.455	0	-0.909	-2054.55	
v	0	0	-2.545	1	0.091	235.455	2590
y	0	1	-0.055	0	0.009	6.545	720
x	1	0	0.009	0	-0.018	0.909	-50

y の行を規格化する.

	x	y	u	v	w	定数項	定数項/列要素
f	0	0	15.455	0	-0.909	-2054.55	
v	0	0	-2.545	1	0.091	235.455	2590
w	0	110	-6	0	1	720	720
x	1	0	0.009	0	-0.018	0.909	-50

w の行で掃き出す.

	x	y	u	v	w	定数項	定数項/列要素
f	0	100	10	0	0	-1400	
v	0	-10	-2	1	0	170	
w	0	110	-6	0	1	720	
x	1	2	-0.1	0	0	14	

よって f を最小とするのは
$(x, y) = (14, 0)$ のときで
$f_{min} = 1400$ である.

□ 2

$$\left.\begin{aligned}&\text{設計変数}:x,y,z\\&\text{目的関数}:f=x+3y+4z\rightarrow\min\\&\text{制約条件}:-x+y+z+u=2\\&\qquad 2x+y-z=8\\&\qquad x+3y-z-v=1\\&\qquad x,y,z\geq 0\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	0	0	0	0	1	1	0	
u	-1	1	1	1	0	0	0	2	
s_1	2	1	-1	0	0	1	0	8	
s_2	1	3	-1	0	-1	0	1	1	

g の行の s_1, s_2 を掃き出す．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-3	-4	2	0	1	0	0	-9	
u	-1	1	1	1	0	0	0	2	
s_1	2	1	-1	0	0	1	0	8	
s_2	1	3	-1	0	-1	0	1	1	

s_2 行がピボット行となる．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-3	-4	2	0	1	0	0	-9	
u	-1	1	1	1	0	0	0	2	2
s_1	2	1	-1	0	0	1	0	8	8
s_2	1	3	-1	0	-1	0	1	1	0.333

y の係数を 1 に規格化する．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-3	-4	2	0	1	0	0	-9	
u	-1	1	1	1	0	0	0	2	2
s_1	2	1	-1	0	0	1	0	8	8
y	0.333	1	-0.333	0	-0.333	0	0.333	0.333	0.333

y の行で掃き出す．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-3	-4	2	0	1	0	0	-9	
u	-1	1	1	1	0	0	0	2	2
s_1	2	1	-1	0	0	1	0	8	8
y	0.333	1	-0.333	0	-0.333	0	0.333	0.333	0.333

y の行がピボット行となる．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-1.667	0	0.667	0	-0.333	0	1.333	-7.667	
u	-1.333	0	1.333	1	0.333	0	-0.333	1.667	-1.25
s_1	1.667	0	-0.667	0	0.333	1	-0.333	7.667	4.6
y	0.333	1	-0.333	0	-0.333	0	0.333	0.333	1

x の係数を 1 に規格化する．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-1.667	0	0.667	0	-0.333	0	1.333	-7.667	
u	-1.333	0	1.333	1	0.333	0	-0.333	1.667	-1.25
s_1	1.667	0	-0.667	0	0.333	1	-0.333	7.667	4.6
x	1	3	-1	0	-1	0	1	1	1

x の行で掃き出す．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	5	-1	0	-2	0	3	-6	
u	0	4	0	1	-1	0	1	3	
s_1	0	-5	1	0	2	1	-2	6	
x	1	3	-1	0	-1	0	1	1	

s_1 の行がピボット行となる．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	5	-1	0	-2	0	3	-6	
u	0	4	0	1	-1	0	1	3	-3
s_1	0	-5	1	0	2	1	-2	6	3
x	1	3	-1	0	-1	0	1	1	-1

v の係数を 1 に規格化する．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	5	-1	0	-2	0	3	-6	
u	0	4	0	1	-1	0	1	3	-3
v	0	-2.5	0.5	0	1	0.5	-1	3	3
x	1	3	-1	0	-1	0	1	1	-1

v の行で掃き出す．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	0	0	0	0	1	1	0	
u	0	1.5	0.5	1	0	0.5	0	6	
v	0	-2.5	0.5	0	1	0.5	-1	3	
x	1	0.5	-0.5	0	0	0.5	0	4	

目的関数を f に戻す.

	x	y	z	u	v	定数項	定数項/列要素
f	1	3	4	0	0	0	
u	0	1.5	0.5	1	0	6	
v	0	-2.5	0.5	0	1	3	
x	1	0.5	-0.5	0	0	4	

f の行の x を掃き出す.

	x	y	z	u	v	定数項	定数項/列要素
f	0	2.5	4.5	0	0	-4	
u	0	1.5	0.5	1	0	6	
v	0	-2.5	0.5	0	1	3	
x	1	0.5	-0.5	0	0	4	

よって f を最小とするのは
$(x,y,z)=(4,0,0)$ のときで
$f_{min}=4$ である.

□ **3** n 箇所の点にかかる加重の大きさを $f_i\,(i=1,\cdots,n)$, 要素の個数を N として, 各要素の変形量を $u_j\,(j=1,\cdots,N)$ とすれば, 以下のように線形計画問題として記述できる.

$$\left.\begin{array}{l}\text{設計変数}:f_1,\cdots,f_n \\ \text{目的関数}:\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i \to \max \\ \text{制約条件}:u_j \le u_0\,(i=1,\cdots,N) \\ \qquad\qquad f_i \ge 0\,(i=1,\cdots,n) \\ \qquad\qquad u_j \ge 0\,(j=1,\cdots,N)\end{array}\right\}$$

□ 4　スラック変数を導入し標準化する．

$$\left.\begin{aligned}\text{設計変数}:&x,y,z,u,v\\\text{目的関数}:&f=6x+3y+5z\to\min\\\text{制約条件}:&x+y+2z-u=10\\&3x+y+z-v=20\\&u,v\geq 0\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

初期頂点を求めるため，人工変数 s_1, s_2 を導入する．初期頂点を求めるための線形計画問題を以下のように記述できる．

$$\left.\begin{aligned}\text{設計変数}:&x,y,z,u,v,s_1,s_2\\\text{目的関数}:&g=s_1+s_2\to\min\\\text{制約条件}:&x+y+2z-u+s_1=10\\&3x+y+z-v+s_2=20\\&u,v,s_1,s_2\geq 0\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	0	0	0	0	1	1	0	
s_1	1	1	2	-1	0	1	0	10	
s_2	3	1	1	0	-1	0	1	20	

g の行の s_1, s_2 を掃き出す．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-4	-2	-3	1	1	0	0	-30	
s_1	1	1	2	-1	0	1	0	10	
s_2	3	1	1	0	-1	0	1	20	

s_2 の行がピボット行となる．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-4	-2	-3	1	1	0	0	-30	
s_1	1	1	2	-1	0	1	0	10	10
s_2	3	1	1	0	-1	0	1	20	6.667

x の係数を 1 に規格化する．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	-4	-2	-3	1	1	0	0	-30	
s_1	1	1	2	-1	0	1	0	10	10
x	1	0.333	0.333	0	-0.333	0	0.333	6.667	6.667

x 行で掃き出す．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	-0.667	-1.667	1	-0.333	0	1.333	-3.333	
s_1	0	0.667	1.667	-1	0.333	1	-0.333	3.333	
x	1	0.333	0.333	0	-0.333	0	0.333	6.667	

s_1 行がピボット行となる．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	-0.667	-1.667	1	-0.333	0	1.333	-3.333	
s_1	0	0.667	1.667	-1	0.333	1	-0.333	3.333	2
x	1	0.333	0.333	0	-0.333	0	0.333	6.667	20

z の係数を 1 に規格化する．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	-0.667	-1.667	1	-0.333	0	1.333	-3.333	
z	0	0.4	1	-0.6	0.2	0.6	-0.2	2	2
x	1	0.333	0.333	0	-0.333	0	0.333	6.667	20

z の行で掃き出す．

	x	y	z	u	v	s_1	s_2	定数項	定数項/列要素
g	0	0	0	0	0	1	1	0	
z	0	0.4	1	-0.6	0.2	0.6	-0.2	2	
x	1	0.2	0	0.2	-0.4	-0.2	0.4	6	

最適解は上の表から $z = 2, x = 6$ となる．非基底変数は $y = 0, u = 0, v = 0, s_1 = 0, s_2 = 0$ となる．すなわち初期実行可能頂点は

$$(x, y, z, u, v, s_1, s_2) = (6, 0, 2, 0, 0, 0, 0) \tag{2.5}$$

次に目的関数 f の最適解を探索する．

	x	y	z	u	v	定数項	定数項/列要素
f	6	3	5	0	0	0	
z	0	0.4	1	-0.6	0.2	2	
x	1	0.2	0	0.2	-0.4	6	

f 行の x, z を掃き出す．

	x	y	z	u	v	定数項	定数項/列要素
f	0	-0.2	0	1.8	1.4	-46	
z	0	0.4	1	-0.6	0.2	2	
x	1	0.2	0	0.2	-0.4	6	

z の行がピボット行となる．

	x	y	z	u	v	定数項	定数項/列要素
f	0	-0.2	0	1.8	1.4	-46	
z	0	0.4	1	-0.6	0.2	2	5
x	1	0.2	0	0.2	-0.4	6	30

y の係数を 1 に規格化する．

	x	y	z	u	v	定数項	定数項/列要素
f	0	-0.2	0	1.8	1.4	-46	
y	0	1	2.5	-1.5	0.5	5	5
x	1	0.2	0	0.2	-0.4	6	30

y の行で掃き出す.

	x	y	z	u	v	定数項	定数項/列要素
f	0	0	0.5	1.5	1.5	-45	
y	0	1	2.5	-1.5	0.5	5	
x	1	0	-0.5	0.5	-0.5	5	

よって f を最小とするのは
$(x, y, z) = (5, 5, 0)$ のときで
$f_{min} = 45$ である.

第 4 章 非線形計画問題

□ 1 △ABC の内部の点を P(x,y,z) とおき、△ABC の各頂点からの距離の 2 乗の和を目的関数 $f(P)$ とおくと、以下の式で書き表わすことができる．

$$f(P) = 3(x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z + 14) \tag{2.6}$$

ダウンヒルシンプレックスを構成する四面体の初期頂点を変化させたときの計算回数の変化は表 2.9 のようになる．但し、表における座標の桁数とはシンプレックスを構成する頂点の座標の桁数を表し、初期位置における 4 つの頂点の内必ず 1 つは原点にくるものとしている．また、計算終了を判定するための定数は 1.00e-12 とし、最適解は $f(2, 2, 2) = 6$ となる．

表 2.9　計算回数の変化

座標の桁数	計算回数
1000000	485
100000	302
10000	270
1000	213
100	155
10	173
1	183
0.1	203
0.01	228
0.001	258

□ 2　シンプレックスを構成する N+1 点の内必ず 1 つの頂点は原点にくるものとし、その他の頂点の座標 0 以上 1 未満としたとき、設計変数の数と計算回数の変化を表 2.10 に示す．計算終了を判定するための定数は 1.00e-12 とし、最適解は $f(1,1,1)=0$ である．また、ダウンヒルシンプレックスを構成する四面体の初期頂点を変化させたときの計算回数の変化を

表 2.10　設計変数と計算回数

次元	計算回数
2	106
3	155
4	308
5	423
10	1442
20	31781
30	61190
40	918280

表 2.11 に示す．但し、表における座標の桁数とはシンプレックスを構成する頂点の座標の桁数を表し、初期位置における 4 つの頂点の内必ず 1 つは原点にくるものとしている．また、計算終了を判定するための定数、最適解は 2.10 の場合と同じである．

表 2.11　計算回数の変化

座標の桁数	計算回数
1000000	485
100000	302
10000	270
1000	213
100	155
10	173
1	183
0.1	203
0.01	228
0.001	258

□ **3** 初期点 $\boldsymbol{x}_0$, 初期最急降下方向 $\boldsymbol{d}_0$, 初期探索方向 $\boldsymbol{p}_0$ は以下のようになる.

$$\boldsymbol{x}_0 = \left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{d}_0 = \left\{ \begin{array}{c} -2 \\ 20 \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{p}_0 = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -20 \end{array} \right\}$$

1 回目の探索後の点の位置 $\boldsymbol{x}_1$, 最急降下方向 $\boldsymbol{d}_1$, 探索方向 $\boldsymbol{p}_1$ は以下のようになる.

$$\boldsymbol{x}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 5.2 \\ 3 \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{d}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 6.8 \\ 3.2 \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{d}_1 = \left\{ \begin{array}{c} -6.520396 \\ -5.99604 \end{array} \right\}$$

同様にして以下の式で, 点の位置 $\boldsymbol{x}_j$, 最急降下方向 $\boldsymbol{d}_{j+1}$, 探索方向 $\boldsymbol{p}_{j+1}$ を決定し, 探索を繰り返す.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_j &= \mathrm{grad} f\left(\boldsymbol{x_j}\right) \\ \boldsymbol{p}_{j+1} &= -\boldsymbol{d_{j+1}} + \frac{||\boldsymbol{d_{j+1}}||^2}{||d_j||^2}\boldsymbol{p_j} \\ \boldsymbol{x}_{j+1} &= \boldsymbol{x}_{j+1} + \alpha \boldsymbol{p}_j \end{aligned}$$

このように探索を繰り返すと, $x = 1.000, y = 0.500$ のとき $f\left(x, y\right) = 0.000$ という解が得られる.

□ **4** p.16 $l.8$ の図 4.4 参照のこと. 図 4.4 のように目的関数が狭い谷をもつ場合収束するまでの歩みが非常に遅くなってしまう. また, 複数の局所的最適解がある場合, 大域的最適解解ではなく局所的最適解に陥ってしまう危険性もある.

□ **5** p.66 $l.10$ からを参照のこと. (長所)
収束が早い. (短所)
局所的最小解に停滞してしまう. ヘッセ行列の正定値性が保証されないため,p.66 図 4.9 のように計算が鞍点に停滞してしまうことがある.

□ 6　初期探索点を $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}}$ とし, 最適解を $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{*}}$ とする. $f(x)$ は n 次元 2 次関数であるので,n 個の互いに共役な探索方向ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$, 各方向の直線探索の歩み幅 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を用いて次式のように表せる.

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{p}_k$$

これをを目的関数式に代入して

$$\begin{aligned} f\left(\boldsymbol{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{p}_k\right) &= \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{p}_k^T\right)[A]\left(\boldsymbol{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{p}_k\right) - \boldsymbol{b}^T\left(\boldsymbol{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{p}_k\right) \\ &= \left(x^{0T}[A]\,\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}^0\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(x^{0T}[A]\,\boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{p}_k^T[A]\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{b}^T\alpha_k\boldsymbol{p}_k\right)\alpha_k\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{\left(\boldsymbol{p}_k^T[A]\,\boldsymbol{p}_l\right)\alpha_k\alpha_l\right\} \end{aligned}$$

ここで, 右辺第三項について,$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は互いに独立なので,
$k \neq l$ のとき $\boldsymbol{p}_k^T[A]\,\boldsymbol{p}_l = 0$ である.
したがって次式のようになる.

$$f\left(\boldsymbol{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{p}_k\right) = \left(x^{0T}[A]\,\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}^0\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(x^{0T}[A]\,\boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{p}_k^T[A]\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{b}^T\alpha_k\boldsymbol{p}_k\right)\alpha_k\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\boldsymbol{p}_k^T[A]\,\boldsymbol{p}_k\right)\alpha_k^2\right\}$$

この式は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ に関して次のような 2 次式となっている.

$$f = \sum_{k=1}^{n}\left(P_k\alpha_k^2 + Q_k\alpha_k\right) + R$$

以上よりこの式の最小点は次の方程式の解となり, 探索は n 回で終わる.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = 2P_k + Q_k = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_k = -\frac{Q_k}{2P_k} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

□ 7　ここではニュートン法により探索を行うことにする. 評価関数 $y = f(x)$ の x_k まわりでの二次近似は次式のように

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0.05	0.05	0.14	0.26	0.52	0.97	1.51	1.74	1.95	1.93	1.94

書ける.

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{x}_k) + \nabla^T f(\boldsymbol{x}_k)\,\boldsymbol{d}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x}_k)\,\boldsymbol{d}$$

ここで,

$$\nabla^T f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial f}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 + \exp(-\beta x)} & \dfrac{x\alpha\exp(-\beta x)}{(1 + \exp(-\beta x))^2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla\nabla^T f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{x\exp(-\beta x)}{(1 + \exp(-\beta x))^2} \\ \dfrac{x\exp(-\beta x)}{(1 + \exp(-\beta x))^2} & -\dfrac{(1 - \exp(-\beta x))\exp(-\beta x)}{1 + \exp(-\beta x)^3}\alpha x^2 \end{bmatrix}$$

である. ニュートン法により探索した結果,$\alpha = 1.9911, \beta = 1.0047$ となった.

第 5 章 制約条件つき最適化問題

☐ 1　(1) ペナルティ係数を p, 罰金関数を $s\left(x\right)$ として, 与えられた問題を次の制約条件のつかない最適化問題に変形する.

$$\begin{gathered}\text{(1) 目的関数} : 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 - 24x + ps\left(x\right)\\ \text{罰金関数} : s\left(x\right) = \begin{cases} 0 & (1 \leq x) \\ 0 & (x < 1) \end{cases}\end{gathered}$$

ペナルティ係数を適当な値にし,4 章で使用した最適化手法を用いれば, $x = 2.658967$ のとき -106.67 という解が得られる.

(2)　ペナルティ係数を p, 罰金関数を $s\left(x\right)$ として, 与えられた問題を次の制約条件のつかない最適化問題に変形する.

$$\begin{gathered}\text{(1) 目的関数} : \sin x + ps\left(x\right)\\ \text{罰金関数} : s\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{-x} & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x < 2\pi) \\ \sqrt{x - 2\pi} & (2\pi \leq x) \end{cases}\end{gathered}$$

ペナルティ係数を適当な値にし,4 章で使用した最適化手法を用いれば, $x = 4.71238\,(= 3/2\pi)$ のとき -1.000 という解が得られる. この問題では, 単峰性の最適化問題にすることはできないので, 探索方法, 初期点によっては局所解に陥ってしまう可能性もある.

□ **2**　図に 12 に目的関数 $f(x)$ の等高線と, 制約条件により限定される実行可能領域を示す. 図中の青い部分で示される領域が実行可能領域である. 以下のように制約条件つき最適化問題として定式化できる.

$$\text{目的関数} : f(x) = -\log\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2+(y-1)^2}} \qquad \to \min$$

$$\text{制約条件} : \frac{x^2}{4}+y^2 \le 1$$

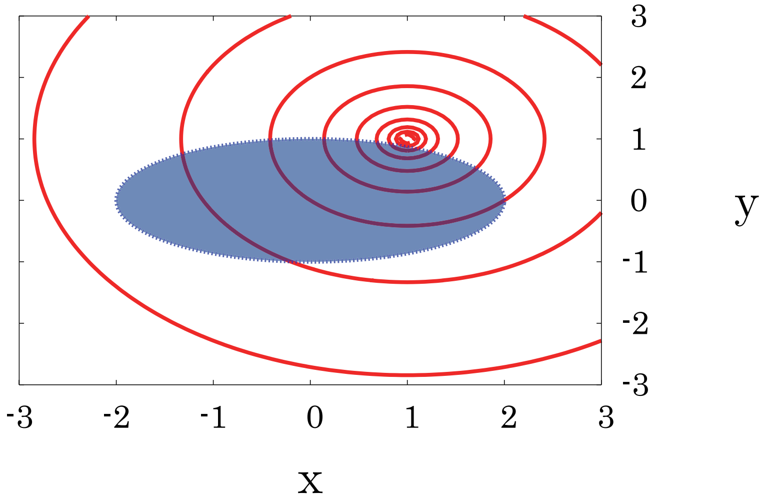


図 12

また, ペナルティ係数を p, 罰金関数を $s(x)$ として, ペナルティ法によって制約条件のつかない最適化問題として定式化すると, 以下のようになる.

$$\text{目的関数} : f(x) = -\log\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2+(y-1)^2}} + ps() \qquad \to \min$$

$$\text{罰金関数} : s(x) = \begin{cases} 0 & \left(\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1\right) \\ x^2 4+y^2-1 & \left(\frac{x^2}{4}+y^2 > 1\right) \end{cases}$$

□ 3　$y = 2x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(x_p, 2x_p^2\right)$ と $\left(1/\sqrt{2}, 0\right)$ の距離を L とすると,

$$
\begin{aligned}
L^2 &= \left(x_p - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2x_p^2\right)^2 \\
&= 4x^4 + x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である. したがって, この問題は以下のような最適化問題に定式化できる.

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数}: f\left(x_p\right) = L^2 = 4x^4 + x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \qquad \to \min \\
&\text{制約条件}: 1 \leq x_p \leq 1
\end{aligned}
$$

ペナルティ係数を p, 罰金関数を $s\left(x\right)$ として, 与えられた問題を次の制約条件のつかない最適化問題に変形する.

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数}: f\left(x_p\right) = L^2 = 4x^4 + x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} + sp\left(x_p\right) \qquad \to \min \\
&\text{罰金関数}: s\left(x_p\right) = \begin{cases} -x_p & \left(x_p < 0\right) \\ 0 & \left(0 \leq x_p \leq 1\right) \\ x_p - 1 & \left(1 < x_p\right) \end{cases}
\end{aligned}
$$

ペナルティ係数を適当な値にし,4 章で使用した最適化手法を用いれば, $x_p = 0.28449$ のとき $L = 0.2715881$ という解が得られる.

□ 4　$R_1 = 1\Omega, R_2 = 2\Omega, R_3 = 4\Omega$ として, 各抵抗器に流れる電流量をそれぞれ,I_1, I_2, I_3 とする．各抵抗器で発生するジュール熱は $R_i I_i^2\,(i=1,2,3)$ なので, この問題は以下のような, 制約条件つき最適化問題に定式化できる．

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数}: R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 \qquad \to \min \\
&\text{制約条件}: I_1 + I_2 + I_3 = 1.4
\end{aligned}
$$

ラグランジュ評価関数は

$$\Pi = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 - \lambda\,(I_1 + I_2 + I_3 - 1.4) \qquad \to \min \tag{2.7}$$

となるから,

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \Pi}{\partial I_1} = 2R_1 - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial \Pi}{\partial I_2} = 2R_2 - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial \Pi}{\partial I_3} = 2R_3 - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = -\,(I_1 + I_2 + I_3 - 1.4) = 0
\end{cases}
$$

これら 4 本の連立方程式を解くと,

$$(I_1, I_2, I_3, \lambda) = (0.8, 0.4, 0.2, 1.6) \tag{2.8}$$

が得られる．またそれぞれの抵抗器に印加される電圧 V_1, V_2, V_3 はオームの法則より,

$$(V_1, V_2, V_3) = (0.8, 0.8, 0.8) \tag{2.9}$$

である. このように各抵抗器に印加される電圧の大きさは等しい．この結果は, 合成抵抗の考え方により計算した結果と一致する．抵抗器を並列につなぎ電流を流すと, 発生ジュール熱が最小となるように電流は流れる．

□ 5 $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ を m 個のラグランジュ未定乗数からなるベクトルとして, ラグランジュ評価関数は

$$\Pi = \frac{\{\boldsymbol{x}\}^T\{\boldsymbol{x}\}}{2} - ([\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\} - \{\boldsymbol{b}\})^T\{\boldsymbol{\lambda}\} \tag{2.10}$$

となるから, 停留条件は以下のようになる.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\boldsymbol{\lambda}\}^T} = \{\boldsymbol{0}\}$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\boldsymbol{x}\}^T} = \{\boldsymbol{0}\}$$

これより, 次式を得る.

$$[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{b}\} \tag{2.11}$$
$$\{\boldsymbol{x}\} = [\boldsymbol{A}]^T\{\boldsymbol{\lambda}\} \tag{2.12}$$

したがって,

$$\{\boldsymbol{b}\} = [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{A}]^T\{\boldsymbol{\lambda}\}$$

よって,

$$\{\boldsymbol{\lambda}\} = \left([\boldsymbol{A}][\boldsymbol{A}]^T\right)^{-1}\{\boldsymbol{b}\}$$

よってこれを, 式 2.12 に代入すると,

$$\{\boldsymbol{x}\} = [\boldsymbol{A}]^-\{\boldsymbol{b}\}$$

ただし,$[\boldsymbol{A}]^- = [\boldsymbol{A}]^T\left([A][A]^T\right)^{-1}$ である. 以上より

$$\{\boldsymbol{x}\} = [\boldsymbol{A}]^T\left([A][A]^T\right)^{-1}\{\boldsymbol{b}\}$$

この式の $[\boldsymbol{A}]^-$ は（ムーア · ペンローズ）一般逆行列[*1]と呼ばれるものである.

[*1] 参考　「計算力学と CAE シリーズ　逆問題」　培風館　久保司郎著

第 6 章 動的計画法

□ **1** 表 6.12 に「総当たり法」により時間を計算した結果を示す.

表 6.12

		3	2	1		合計
1	S	C_1	B_1	A_1	G	11
2	S	C_1	B_1	A_2	G	12
3	S	C_1	B_2	A_1	G	13
4	S	C_1	B_2	A_2	G	12
5	S	C_1	B_3	A_2	G	9
6	S	C_2	B_2	A_1	G	13
7	S	C_2	B_2	A_2	G	12
8	S	C_3	B_1	A_1	G	14
9	S	C_3	B_1	A_2	G	15
10	S	C_3	B_2	A_1	G	11
11	S	C_3	B_2	A_2	G	10
12	S	C_3	B_3	A_2	G	10

動的計画法のほうが効率的であることが確認できた.

□ **2** 例題 6.2 と同様にして,

$$f\,(7) = \max\{f(5)+13, f(4)+17, f(3)+25\}$$

が $f(7)$ を計算するための方程式となる.$f(5), f(4), f(3)$ の値は例題で求められており,

$$f\,(5) = 30, f\,(4) = 26, f\,(3) = 17$$

また,$f\,(6) = 39$ である．したがって,

$$f\,(7) = \max\{43, 43, 42\} = 43$$

が最適値である．結局, 最適値は $b = 7\,(\mathrm{kg})$ のときで 43（円）であり, パーツ 1 を 2 個, パーツ 2 を 1 個である．$f\,(7)$ を計算するための $f\,(\theta)$ の呼び出しの様子を 13 に示す.

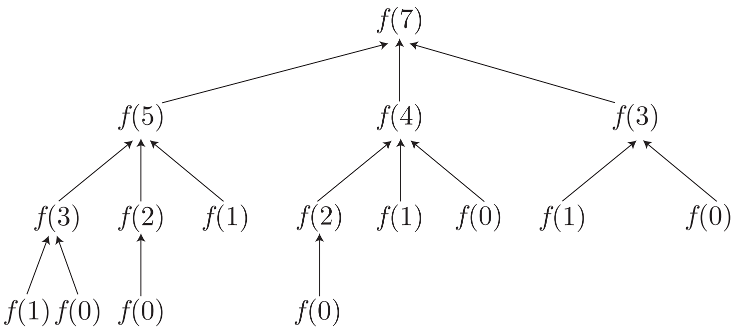


図 13

□ 3　資金 200 億円のうち企業 B と C に合わせて x 億円の分配を行った場合の, 最大収益を $f(x)$ とする. B,C への資源配分問題を考え, 最大収益 $f(x)$ は表 6.13 のようになる. 企業 A への分配は $200-x$ であるから,3 企業への分配, 最大収益は表 6.14 のようになる. したがって, 最大収益が得られるのは,

表 6.13

x	$f(x)$	B への分配	C への分配
0	0	0	0
50	10	50	0
100	20	0	100
150	35	150	0
200	45	200	0

表 6.14

x	総収益	A への分配	B への分配	C への分配
0	$f(0)$+40=40	200	0	0
50	$f(50)$+30=40	150	50	0
100	$f(100)$+25=45	100	0	100
150	$f(150)$+10=45	50	150	0
200	$f(200)$+ 0=45	0	200	0

$$(A,B,C)=(0,200,0)\,,(50,150,0)\,,(100,0,100)$$

のときで, そのときの収益は 45 である.

□ 4　まずはいくつかの整数からなる列を 1 つの仕切りによって分割する問題から考えればよい.
右側 n 個の整数について, 仕切りを 1 つ入れる場合の最適な配置を求める.

(i) $n = 2$　$4|9 \to$ 和の最大値は 9
(ii) $n = 3$　$7, 4|9 \to$ 和の最大値は 11
(iii) $n = 4$　$3, 7|4, 9 \to$ 和の最大値は 13
(iv) $n = 5$　$5, 3, 7|4, 9 \to$ 和の最大値は 15
(v) $n = 6$　$6, 5, 3|7, 4, 9 \to$ 和の最大値は 20
(vi) $n = 7$　$2, 6, 5, 3|7, 4, 9 \to$ 和の最大値は 20

次に右側 m 個の整数について, 仕切りを 2 つ入れる場合の最適な配置を考える.
例えば $m = 4$ の場合は「$3, 7, 4, 9$」に 2 つの仕切りを配置するが, そのうち左側の仕切りの配置の仕方は
(a) $3|7, 4, 9$,　(b) $3, 7|4, 9$
のいずれかが考えられる.
左側の仕切りの位置が決まれば, 右側の仕切りの位置は上に示した (i),(ii) の結果より決定されるので,(a),(b) それぞれの場合はそれぞれ以下のようになる.
(a) $3|7, 4|9 \to$ 和の最大値は 11　(b) $3, 7|4|9 \to$ 和の最大値は 10
したがって,$m = 4$ の場合は和の最大値が小さい「$3, 7|4|9$」が最適な仕切りの配置である.
同様にして,

(i) $m = 3$　$7|4|9 \to$ 和の最大値は 9
(ii) $m = 4$　$3, 7|4|9 \to$ 和の最大値は 10
(iii) $m = 5$　$5, 3|7, 4|9 \to$ 和の最大値は 11
(iv) $m = 6$　$6, 5|3, 7|4, 9 \to$ 和の最大値は 13
(v) $m = 7$　$2, 6, 5|3, 7|4, 9 \to$ 和の最大値は 13
(vi) $m = 8$　$1, 2, 6, 5|3, 7|4, 9 \to$ 和の最大値は 14

最終的に 9 個の整数の列に 3 つの仕切りを入れる問題を考える.

(i)　$8, 1, 2, 6, 5, 3|7|4|9 \to$ 和の最大値は 25
(ii)　$8, 1, 2, 6, 5|3, 7|4|9 \to$ 和の最大値は 22
(iii)　$8, 1, 2, 6|5, 3|7, 4|9 \to$ 和の最大値は 17
(iv)　$8, 1, 2|6, 5|3, 7|4, 9 \to$ 和の最大値は 13
(v)　$8, 1|2, 6, 5|3, 7|4, 9 \to$ 和の最大値は 13
(vi)　$8|1, 2, 6, 5|3, 7|4, 9 \to$ 和の最大値は 14

したがって, 題意を満たす最適な仕切りの配置は
$8, 1, 2|6, 5|3, 7|4, 9$
$8, 1|2, 6, 5|3, 7|4, 9$
の 2 通りであり, その時の和は 13 である.