

“工学のための数値計算（初版第2刷）” 正誤表

- 6章, 99ページ, 上から7行目の式を, 次のようにご修正下さい.

$$\begin{array}{l} \text{【誤】} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ \underline{\underline{2}} & 2 - \lambda \end{bmatrix} \\ \text{【正】} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ \underline{\underline{1}} & 2 - \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

(2) 求めるべき $x = c$ に対して, 順次

$$b_{n-1} = b_n c + a_{n-1}$$

$$b_{n-2} = b_{n-1} c + a_{n-2}$$

⋮

$$b_1 = b_2 c + a_1$$

$$b_0 = b_1 c + a_0$$

を計算する.

(3) b_0 が求めるべき $p_n(c)$ である.

なお, $p_n(x)$ は

$$p_n(x) = (x - c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1) + b_0$$

と表されるため, $b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$ は $p_n(x)$ を $x - c$ で割った商で, b_0 は余りである. したがって, ホーナー法は組み立て除法と同じ計算方法である.

例 5 多項式 $p_5(x) = 2x^5 + 9x^4 + 4x^3 - 16x^2 + 3x + 22$ を $x + 3$ で割ったときの商 $q_4(x) = b_5 x^4 + b_4 x^3 + b_3 x^2 + b_2 x + b_1$ と余り $p_5(-3) = b_0$ をホーナー法により求めると,

$$b_5 = a_5 = 2$$

$$b_4 = (-3)b_5 + a_4 = (-3) \times 2 + 9 = 3$$

$$b_3 = (-3)b_4 + a_3 = (-3) \times 3 + 4 = -5$$

$$b_2 = (-3)b_3 + a_2 = (-3) \times (-5) - 16 = -1$$

$$b_1 = (-3)b_2 + a_1 = (-3) \times (-1) + 3 = 6$$

$$b_0 = (-3)b_1 + a_0 = (-3) \times 6 + 22 = 4$$

$$q_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - x + 6, \quad p_5(-3) = b_0 = 4$$

と計算される.

FIV

□

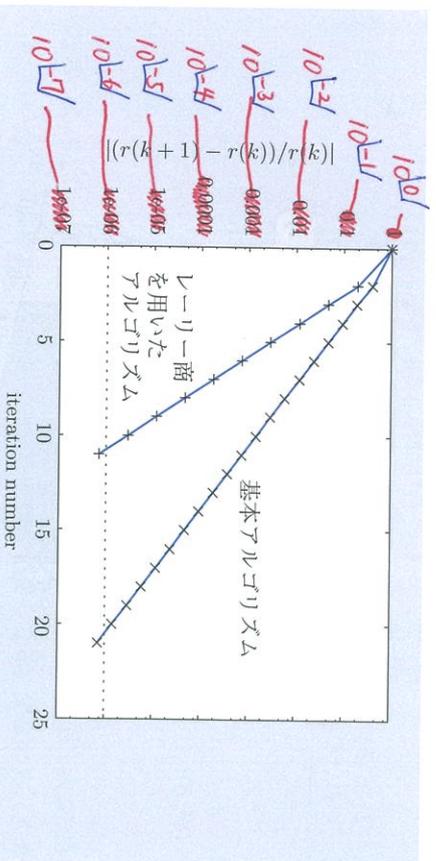


図 6.2 べき乗法の 2 つのアルゴリズムを適用したときの収束の様子。横軸は反復回数，縦軸は $\|r^{(k+1)} - r^{(k)}\|/|r^{(k)}|$ を表す。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の最大固有値の 4 倍が最大となる直方体の表面積であり，その固有値に対応した固有ベクトルが直方体の頂点の座標となる。

この問題を 6.2.2 項で述べたレーリー商を用いたアルゴリズムで解いてみよう。初期ベクトルを $x^{(0)} = [1 \ 2 \ 3]^T$ とし，収束判定の定数を $\epsilon = 1.0 \times 10^{-6}$ とすれば，図 6.2 に示すように 11 回の反復で収束し，固有値 2 と固有ベクトル $[1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3}]^T$ が得られる。これより，立方体のときに表面積が最大となり，その値は 8 となる。

次に，6.2.1 項で述べた基本アルゴリズムを適用してみよう。上と同じ初期ベクトルと収束判定の定数を用いると，図 6.2 にあるように 21 回の反復で収束する。このように，対称行列の場合は 6.2.1 項の基本アルゴリズムではなく，6.2.2 項のレーリー商を用いたアルゴリズムを適用すると収束が速くなる。その速度比は約 2 倍である。

による積分を s の積分に変換すると,

$$w_0 = h \int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{(0-1)(0-2)} ds = \frac{h}{3}, \quad w_1 = h \int_0^2 \frac{s(s-2)}{1 \cdot (1-2)} ds = \frac{4h}{3}$$

と計算される(詳細は章末問題1参照, 対称性から w_0 は w_2 に等しい)。したがって, 実際のシンプソン則は次のように書ける。

$$\begin{aligned} I_2(f) &= \frac{h}{3} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(b) \right\} \\ &= \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(b) \right\} \end{aligned} \quad (8.5)$$

例1 $\int_0^2 e^x dx = 6.389056099 \dots$ をシンプソン則で数値積分すると,

$$\int_0^2 e^x dx \approx \frac{2-0}{6}(e^0 + 4e^1 + e^2) = 6.4207 \dots$$

となり, 誤差は -0.032 である。8.1.1項で示したように, 台形則(図8.1(a))による誤差は -2 , 中点則(同(b))では 0.95 であるから, シンプソン則ははるかに精度がよい(図8.2)。

■8.2.3 さらに高次のニュートン・コーツ則

台形則, シンプソン則よりもさらに高次のニュートン・コーツ則は, 式(8.4)を実際に積分することで求められる。表8.1に高次のニュートン・コーツ則の重みを示す。ここで, $w_k = \frac{(b-a)^k}{d} w'_k$ である。この表から, 例えば $n=6$ の7点則 $I_6(f)$ は, $f_k = f(a + \frac{(b-a)k}{6})$ ($k=0, 1, \dots, 6$) と表すと,

$$I_6(f) = \frac{b-a}{840} \{41(f_0 + f_6) + 216(f_1 + f_5) + 27(f_2 + f_4) + 272f_3\}$$

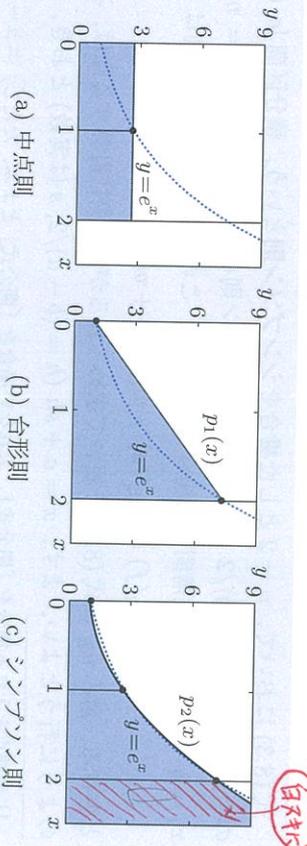


図8.2 中点則, 台形則, シンプソン則による $\int_0^2 e^x dx$ の数値積分

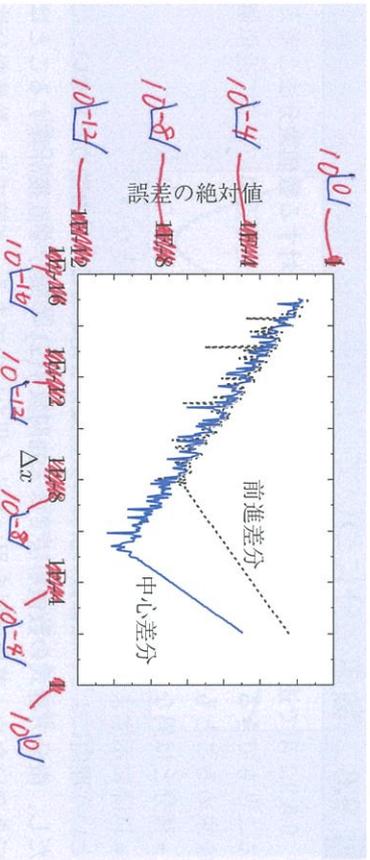


図 9.15 $y(x) = \cos x$ に対する中心および前進差分近似による誤差

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{y(x + \Delta x)(1 + \delta_1) - y(x - \Delta x)(1 + \delta_2)}{2\Delta x} - y'(x) \right| \\
 & \leq \left| \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} u \right| + \left| \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} - y'(x) \right| \\
 & \lesssim \frac{|y(x + \Delta x)| + |y(x - \Delta x)|}{2\Delta x} u + \frac{(\Delta x)^2}{6} |y'''(x)| \\
 & \approx \frac{|y(x)|u}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{6} |y'''(x)|
 \end{aligned}$$

となる (最後の變形では $y(x + \Delta x) \approx y(x - \Delta x) \approx y(x)$ とした).

ここで, $\frac{|y(x)|u}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{6} |y'''(x)|$ は, $\Delta x = \sqrt[3]{3u \frac{|y(x)|}{|y'''(x)|}}$ で最小値 $\frac{1}{2} \sqrt[3]{9(|y(x)|u)^2 |y'''(x)|}$ をとる (実際に Δx について微分すれば確認できる). 図 9.15 における $y(x) = \cos x$ の例では, $|y(x)|$ と $|y'''(x)|$ は共に 1 程度の大さきであり, 表 2.1 に示すように倍精度実数計算では $u = 1.11 \times 10^{-16}$ であるから, $\Delta x = 7 \times 10^{-6}$ あたりで最小誤差 2×10^{-11} をとる. 以上が, 図 9.15 の傾向を説明する. なお, 図 9.15 において, 各データの最小値の左側でギザギザが生じているのは, ランダムに発生する丸め誤差の影響による.

なお, 式 (9.56) に示す前進差分についても同様の扱いが可能である. 図 9.15 の破線は, 中心差分の場合と同様に, $x = \frac{\pi}{4}$ における $y(x) = \cos x$ の微係数を前進差分近似したときの誤差である. 中心差分と同様の解析を行うことにより, このときは $\Delta x = 2 \times 10^{-8}$ あたりで最小誤差 2×10^{-8} をとるという結果が得られ, 図 9.15 の傾向をよく説明している.