

「工学のための数値計算」 3章 章末問題 解答例

□ 1 (1) 前進代入で解く.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{6}{3} = 2 \\ x_2 &= \frac{9 - 2 \times 2}{-5} = -1 \\ x_3 &= \frac{9 - (-1) \times 2 - 1 \times (-1)}{4} = 3 \end{aligned}$$

(2) 後退代入で解く.

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{18}{6} = 3 \\ x_2 &= \frac{-15 - (-4) \times 3}{3} = -1 \\ x_1 &= \frac{19 - 1 \times (-1) - 8 \times 3}{-2} = 2 \end{aligned}$$

□ 2 A の LU 分解を p.37 のアルゴリズムを使って求めると,

3	2	1	→	$A(2:3, 1) \leftarrow A(2:3, 1)/A(1, 1)$ $A(2:3, 2:3) \leftarrow A(2:3, 2:3) - A(2:3, 1)A(1, 2:3)$
-6	-2	-5		
6	-2	13		
			↙	
3	2	1	→	$A(3, 2) \leftarrow A(3, 2)/A(2, 2)$ $A(3, 3) \leftarrow A(3, 3) - A(3, 2)A(2, 3)$
-2	2	-3		
2	-6	11		
			↙	
3	2	1		
-2	2	-3		
2	-3	2		

となり,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

が得られる.

□ 3 任意の 2 次元ベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ に関して 2 次形式を計算すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= (2x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

となり, 正定値であることが示された.

まず, A の LU 分解を求めると,

$$\begin{array}{cc|c}
\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & -2 \\ \hline -2 & 2 \\ \hline \end{array} & \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{l} A(2,1) \leftarrow A(2,1)/A(1,1) \\ A(2,2) \leftarrow A(2,2) - A(2,1)A(1,2) \end{array}} \\
& \swarrow & \\
\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & -2 \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline \end{array} & &
\end{array}$$

より,

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である. 次に, A を p.48 のアルゴリズムを用いてコレスキー分解すると,

$$\begin{array}{cc|c}
\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & -2 \\ \hline -2 & 2 \\ \hline \end{array} & \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{l} A(1,1) \leftarrow \sqrt{A(1,1)} \\ A(2,1) \leftarrow A(2,1)/A(1,1) \\ A(2,2) \leftarrow A(2,2) - A(2,1)A(2,1)^T \end{array}} \\
& \swarrow & \\
\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} & &
\end{array}$$

より,

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる.

□ 4 上三角行列 U の対角成分はすべて 1 と仮定したので, L と U をそれぞれ

$$L = \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ l_{11} & O \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ 1 & U_{12} \\ O & U_{22} \end{bmatrix}$$

と分割し, これを掛け合せて

$$A = \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

と比較すると,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{11} & O \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} \\ O & U_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}U_{12} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となり,

$$l_{11} = a_{11}, \quad L_{21} = A_{21}, \quad U_{12} = A_{12}/l_{11}$$

が得られる。そして、 $\hat{A}_{22} = A_{22} - L_{21}U_{12}$ とおけば

$$\hat{A}_{22} = L_{22}U_{22}$$

であるから、上と同じ操作を $\hat{A}_{22}$ に繰り返し行っていけば A の LU 分解が得られる。計算のアルゴリズムを表すと以下ようになる。

```

For  $k = 1 : n - 1$ 
   $A(k, k + 1 : n) \leftarrow A(k, k + 1 : n) / A(k, k)$ 
   $A(k + 1 : n, k + 1 : n) \leftarrow$ 
     $A(k + 1 : n, k + 1 : n) - A(k + 1 : n, k)A(k, k + 1 : n)$ 
end

```

□ 5 問題 3 の A に対してピボット選択付 LU 分解を行う。

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 50px;"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-2</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>-2</td><td>13</td></tr> </table>	3	2	1	-6	-2	-5	6	-2	13	$\rightarrow$	1 行目と 2 行目を 入れ換える	$\rightarrow$	$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & -5 \\ 6 & -2 & 13 \end{bmatrix}$
3	2	1											
-6	-2	-5											
6	-2	13											
$\swarrow$													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 50px;"> <tr><td>-6</td><td>-2</td><td>-5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>-2</td><td>13</td></tr> </table>	-6	-2	-5	3	2	1	6	-2	13	$\rightarrow$	$\begin{aligned} A(2 : 3, 1) &\leftarrow A(2 : 3, 1) / A(1, 1) \\ A(2 : 3, 2 : 3) &\leftarrow \\ &A(2 : 3, 2 : 3) - A(2 : 3, 1)A(1, 2 : 3) \end{aligned}$		
-6	-2	-5											
3	2	1											
6	-2	13											
$\swarrow$													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 50px;"> <tr><td>-6</td><td>-2</td><td>-5</td></tr> <tr><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>$-\frac{3}{2}$</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-4</td><td>8</td></tr> </table>	-6	-2	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	-1	-4	8	$\rightarrow$	2 行目と 3 行目を 入れ換える	$\rightarrow$	$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P^{(2)}} \begin{bmatrix} -6 & -2 & -5 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$
-6	-2	-5											
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$											
-1	-4	8											
$\swarrow$													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 50px;"> <tr><td>-6</td><td>-2</td><td>-5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-4</td><td>8</td></tr> <tr><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>$-\frac{3}{2}$</td></tr> </table>	-6	-2	-5	-1	-4	8	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\rightarrow$	$\begin{aligned} A(3, 2) &\leftarrow A(3, 2) / A(2, 2) \\ A(3, 3) &\leftarrow A(3, 3) - A(3, 2)A(2, 3) \end{aligned}$		
-6	-2	-5											
-1	-4	8											
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$											
$\swarrow$													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 50px;"> <tr><td>-6</td><td>-2</td><td>-5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-4</td><td>8</td></tr> <tr><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr> </table>	-6	-2	-5	-1	-4	8	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$				
-6	-2	-5											
-1	-4	8											
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$											

これより,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ならびに

$$P = P^{(2)}P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。