「工学のための数値計算」 7章 章末問題 解答例

□ **1** $f(x) = e^x$ とおく．

$$p_2(x) = f(-1)\frac{x(x-1)}{-1(-1-1)} + f(0)\frac{(x-1)(x+1)}{-1(1)} + f(1)\frac{x(x+1)}{1(1+1)}$$

だから

$$\begin{aligned} p_2(0.5) &= e^{-1}\frac{0.5(0.5-1)}{2} + e^0\frac{(0.5-1)(0.5+1)}{-1} + e^1\frac{0.5(0.5+1)}{2} \\ &= -0.3678794 \times \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + 2.718282 \times \frac{3}{8} = 1.723370 \end{aligned}$$

誤差は $e^{0.5} - p_2(0.5) = 1.6487213 - 1.723370 = -7.4\ldots \times 10^{-2}$

□ **2** 差分商の表は下である．

x_i	$f(\cdot)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
-1.0	0.367879			
0.0	1.0	0.632121		
1.0	2.718282	1.718282	0.543080	
2.0	7.389056	4.670774	1.476246	0.311055

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(-1) + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1](x+1)x \\ &= 0.367879 + 0.632121(x+1) + 0.543080(x+1)x \end{aligned}$$

$$p_3(x) = p_2(x) + 0.311055(x+1)x(x-1)$$

である．問題 1 の解答より $p_2(0.5) = 1.723370$ であるから

$$p_3(0.5) = 1.723370 + 0.543080(0.5+1)0.5(0.5-1) = 1.606724$$

誤差は $e^{0.5} - p_3(0.5) = 4.1\ldots \times 10^{-2}$

□ **3** 差分商の表は下である．

x_i	$f(\cdot)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0.0	1.0			
0.0	1.0	$f'(0.0) = 1.0$		
1.0	2.718282	1.718282	0.718282	
1.0	2.718282	$f'(1.0) = 2.718282$	1.0	0.281718

$$p_3(x) = 1.0 + x + 0.718282x^2 + 0.281718x^2(x-1)$$

$$p_3(0.5) = 1 + 0.5 + 0.718282 \times 0.5^2 + 0.281718 \times 0.5^2 \times (-0.5) = 1.644356$$

誤差は $e^{0.5} - p_3(0.5) = 4.3\ldots \times 10^{-3}$

□ **4** 区間 $[-2,2]$ を 4 等分して $[-2,-1]$，$[-1,0]$，$[0,1]$，$[1,2]$ とする．区間 $[-2,-1]$ での差分商の表を図 7.13 に従って作成すると

x_i	$f(\cdot)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
-2.0	e^{-4}			
-2.0	e^{-4}	$f'(-2)=4e^{-4}$		
-1.0	e^{-1}	$e^{-1}-e^{-4}$	$e^{-1}-5e^{-4}$	
-1.0	e^{-1}	$f'(-1)=2e^{-1}$	$e^{-1}+e^{-4}$	$6e^{-4}$

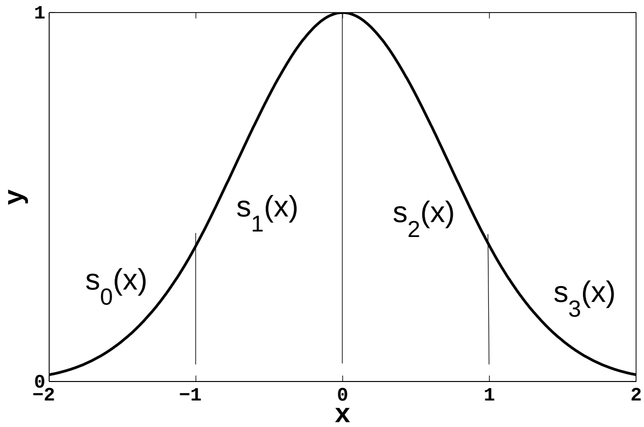
すると区間 $[-2.-1]$ での 3 次エルミート補間式 $s_0(x)$ は

$$s_0(x) = e^{-4} + 4e^{-4}(x+2) + (e^{-1}-5e^{-4})(x+2)^2 + 6e^{-4}(x+2)^2(x+1)$$

同様に $[-1,0]$，$[0,1]$，$[1,2]$ での 3 次エルミート補間式 $s_1(x)$，$s_2(x)$，$s_3(x)$ は各々

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= e^{-1} + 2e^{-1}(x+1) + (1-3e^{-1})(x+1)^2 + (4e^{-1}-2)(x+1)^2 x \\
s_2(x) &= 1 + (e^{-1}-1)x^2 + (2-4e^{-1})x^2(x-1) \\
s_3(x) &= e^{-1} - 2e^{-1}(x-1) + (e^{-4}+e^{-1})(x-1)^2 - 6e^{-4}(x-1)^2(x-2)
\end{aligned}$$

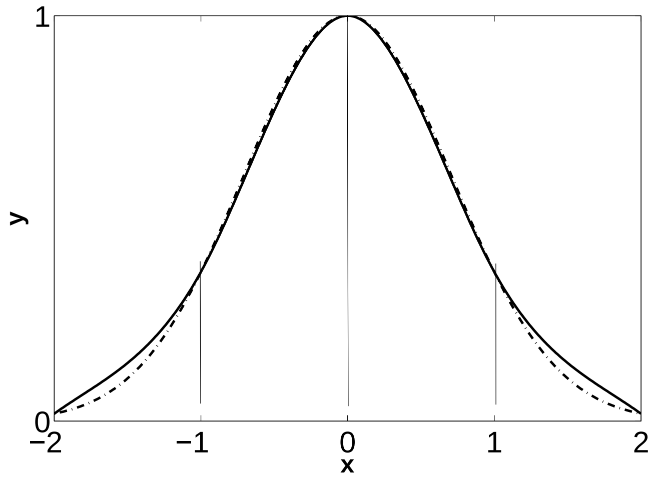
これを下の図に示す．関数 $f(x)=e^{-x^2}$ と重なって差異は判別できない．



☐ **5** $f(x) = e^{-x^2}$ とおく．自然 3 次スプラインのパラメータ α_i を決定する条件式 (7.26) と (7.27) を行列で書くと，$x_0=-2$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$ であるから

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\{f(-1)-f(-2)\} \\ 3\{f(0)-f(-2)\} \\ 3\{f(1)-f(-1)\} \\ 3\{f(2)-f(0)\} \\ 3\{f(2)-f(1)\} \end{bmatrix}$$

と表される．これを解いて，$\alpha_0=-\alpha_4=0.257975$, $\alpha_1=-\alpha_3=0.656338$, $\alpha_2=0$．これらを式 (7.23) に代入すると $s_0(x)$，$s_1(x)$，$s_2(x)$，$s_3(x)$ がえられる．下の図の実線である．1 点破線は関数 $f(x)=e^{-x^2}$ である．



☐ **6** (1) $x = \cos\theta$ とおくと

$$T_{k+1}(x) - T_{k-1}(x) = \cos(k+1)\theta - \cos(k-1)\theta = 2\sin\theta\sin k\theta$$

$\theta = \pi j/k$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$ のとき $T_{k+1}(x) - T_{k-1}(x) = 0$ であるから，$\cos\frac{\pi j}{k}$ が解である．

(2) 漸化式 (7.33) と $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ より $T_{k+1}(x) = (2x)^k x + (k$ 次式$)$ と表される．

(3) ヒントおよび式 (7.16) より，補間誤差は

$$f(x) - p_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot \frac{T_{k+1}(x) - T_{k-1}(x)}{2^k}$$

と表される．条件より

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M}{(k+1)!} \cdot \frac{2}{2^k} \to 0, \quad k \to \infty.$$