「工学のための数値計算」 8章 章末問題 解答例

□ **1** **(1)** 変数変換 $x = a + sh$ とおくと，$x_j = a + jh$ であり，積分区間 $[a, b]$ は $[0, n]$ に変換される．これらを考慮すると結果がえられる．

(2)

$$w_{n-k} = h\int_0^n \frac{s(s-1)\cdots(s-(n-k-1))(s-(n-k+1))\cdots(s-n)}{(n-k)(n-k-1)\cdots(1)(-1)\cdots(-k)}ds$$

ここで，変数変換 $s = n - t$ をすると

$$\begin{aligned}
w_{n-k} &= h\int_n^0 \frac{(n-t)(n-t-1)\cdots(n-t-(n-k-1))(n-t-(n-k+1))\cdots(-t)}{(n-k)(n-k-1)\cdots(1)(-1)\cdots(-k)}(-1)dt \\
&= h\int_0^n \frac{(n-t)(n-t-1)\cdots(k+1-t)(k-1-t)\cdots(-t)}{(n-k)(n-k-1)\cdots(1)(-1)\cdots(-k)}dt \\
&= h\int_0^n \frac{(t-n)(t-n+1)\cdots(t-(k+1))(t-(k-1))\cdots t}{(k-n)(k-n+1)\cdots(-1)(1)\cdots k}dt = w_k
\end{aligned}$$

□ **2** $h = (b-a)/n$ とおくと

$$\begin{aligned}
T_n &= h\Big\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\Big\} \\
T_{2n} &= \frac{h}{2}\Big\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{2n-1} f(a+k\frac{h}{2})\Big\} = \frac{h}{2}\Big\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{h}{2}+kh)\Big\}
\end{aligned}$$

一方中点則 M_n は

$$M_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{h}{2}+kh)$$

であるから $T_{2n} = (T_n + M_n)/2$ が成り立つ．

□ **3** **(1)** $M_1 = 2f(1) = 2/(2^2) = 0.5$．$M_2 = f(0.5) + f(1.5) = 4/9 + 4/25 = 0.604444\ldots$．$M_4 = 0.5\{f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)\} = 0.64814\ldots$．

n	M_n	誤差	比
1	0.5	$0.166\ldots$	
2	$0.6044\ldots$	$0.0622\ldots$	$0.373\ldots$
4	$0.6481\ldots$	$0.0185\ldots$	$0.297\ldots$

誤差の比が $1/4 = 0.25$ に近づいて行くことがわかる．

(2) 結果は下の表のようである．

n	S_n	| 誤差 |	比
1	0.7037037	3.70×10^{-2}	
2	0.6714814	4.81×10^{-3}	0.13
4	0.6670976	4.31×10^{-4}	0.089

誤差の比が $1/16 = 0.0625$ に近づいて行くことがわかる．

□ **4** $M_1 = \sqrt{1/2} = 0.7071067\ldots$．$|I - M_1| = 0.04044\ldots$
$M_2 = (\sqrt{1/4} + \sqrt{3/4})/2 = 0.683012\ldots$．$|I - M_2| = 0.01634\ldots$
$M_4 = 0.672977397\ldots$．$|I - M_4| = 0.0063107\ldots$

$|I-M_2|/|I-M_1| = 1/2.47\ldots$. $|I-M_4|/|I-M_2| = 1/2.6\ldots$. 誤差の減少率は 1/4 より大きい．その理由は関数 $\sqrt{x}$ の 1 階微分が積分区間 $[0,1]$ の端点で発散するからである．したがって中点則の誤差の公式 (8.16) が成立しない．

□ **5** $h=(b-a)/n$ とおくと

$$
\begin{aligned}
T_n &= h\Big\{\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)\Big\}\\
T_{2n} &= \frac{h}{2}\Big\{\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{2n-1}f(a+kh/2)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{2n}^{(1)} &= \frac{4T_{2n}-T_n}{4-1}\\
&= \frac{1}{3}\Big[2h\Big\{\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{2n-1}f(a+kh/2)\Big\}-h\Big\{\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)\Big\}\Big]\\
&= \frac{h}{6}\Big[f(a)+f(b)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(a+kh+h/2)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)\Big]=S_{2n}
\end{aligned}
$$

□ **6** 変数変換 $x=t+1$ により $\int_0^2 e^x dx=\int_{-1}^1 e^{t+1}dt$.

$$
\int_{-1}^1 e^{t+1}dt \approx e^{1-1/\sqrt{3}}+e^{1+1/\sqrt{3}}=6.3681082\cdots
$$

誤差は $0.0209\cdots$ である．シンプソン則の誤差は $-0.03167\cdots$ であるから，2 点ガウス則の方が精度がよい．