「工学のための数値計算」 9章 章末問題 解答例

□ **1** (1) $f(x,y)=y$ であるため，オイラー法は $Y_{i+1}=Y_i+\Delta x\, Y_i$ ($Y_0=1$，$\Delta x=0.1$) となる．
(2) 解析解は $y=e^x$．比較結果は右表.

i	x	オイラー法 Y_i	解析解 e^x
1	0.1	1.1000	1.1052
2	0.2	1.2100	1.2214
3	0.3	1.3310	1.3499
4	0.4	1.4641	1.4918

□ **2** (1) $Y_{i+1}=Y_i+\frac{\Delta x}{2}(k_1+k_2)$，$k_1=Y_i$，$k_2=Y_i+k_1\Delta x$ ($\Delta x=0.1$，$Y_0=1$) において，$i=0$ とすると $k_1=1$，$k_2=1.1$ となり，これより $Y_1=1.105000$．(2) $Y_{i+1}=Y_i+\frac{\Delta x}{6}(k_0+2k_1+2k_2+k_3)$，$k_1=Y_i$，$k_2=Y_i+k_1\frac{\Delta x}{2}$，$k_3=Y_i+k_2\frac{\Delta x}{2}$，$k_4=Y_i+k_3\Delta x$ ($\Delta x=0.1$，$Y_0=1$) において，$i=0$ とすると $k_1=1$，$k_2=1.05$，$k_3=1.0525$，$k_4=1.10525$ で，$Y_1=1.105171$．(3) $\Delta x=0.1$ として $i=1$〜10 まで計算すると，次表が得られる．

i	x	(1) 2 次	(2) 4 次	解析解 e^x
1	0.10	1.105000	1.105171	1.105171
2	0.20	1.221025	1.221403	1.221403
3	0.30	1.349233	1.349858	1.349859
4	0.40	1.490902	1.491824	1.491825
5	0.50	1.647447	1.648721	1.648721
6	0.60	1.820429	1.822118	1.822119
7	0.70	2.011574	2.013752	2.013753
8	0.80	2.222789	2.225540	2.225541
9	0.90	2.456182	2.459601	2.459603

□ **3** 式 (**??**) において $\lambda_1=1$ とすると，$\lambda_0=0$，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}f(x_i,Y_i)$ となり，$Y_{i+1}=Y_i+\Delta x\, f\big(x_i+\frac{\Delta x}{2},Y_i+\frac{\Delta x}{2}f(x_i,Y_i)\big)$ が得られる．

□ **5** 式 (**??**) を用いる．(1) オイラー法では,

$$\boldsymbol{\Theta}_1=\begin{bmatrix}\Theta_{0,0}\\ \Theta_{1,0}\end{bmatrix}+\Delta t\begin{bmatrix}\Theta_{1,0}\\ -\sin\Theta_{0,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\pi}{3}\\ 0\end{bmatrix}+0.05\begin{bmatrix}0\\ -\sin\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.047197\\ 0.433012\end{bmatrix}$$

(2) 4 次のルンゲ-クッタ法では，**??**ページの 2 次の場合を例にして 4 次の公式を適用すればよい．順に計算すると,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{f}(t_i,\,\boldsymbol{\Theta}_i)=\begin{bmatrix}0\\ -\sin\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -0.866025\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{\Theta}_0+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{k}_1 &= \begin{bmatrix}\frac{\pi}{3}\\ 0\end{bmatrix}+0.025\begin{bmatrix}0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.047198\\ -0.021651\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{f}(t_i+\frac{\Delta t}{2},\,\boldsymbol{\Theta}_i+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{k}_1)=\begin{bmatrix}-0.021651\\ -\sin(1.047198)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-0.021651\\ -0.866025\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{\Theta}_0+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{k}_2 &= \begin{bmatrix}\frac{\pi}{3}\\ 0\end{bmatrix}+0.025\begin{bmatrix}-0.021651\\ -0.866025\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.046656\\ -0.021651\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_3 &= \boldsymbol{f}(t_i + \frac{\Delta t}{2},\, \boldsymbol{\Theta}_i + \frac{\Delta t}{2}\,\boldsymbol{k}_2) = \begin{bmatrix} -0.021651 \\ -0.865755 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\Theta}_0 + \Delta t\,\boldsymbol{k}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + 0.05 \begin{bmatrix} -0.021651 \\ -0.865755 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.046115 \\ -0.043288 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{k}_4 &= \boldsymbol{f}(t_i + \Delta t,\, \boldsymbol{\Theta}_i + \Delta t\,\boldsymbol{k}_3) = \begin{bmatrix} -0.043288 \\ -0.865484 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\Theta}_1 &= \boldsymbol{\Theta}_0 + \frac{\Delta t}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4) = \begin{bmatrix} 1.046115 \\ -0.043292 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

□ **7** 式 (??) を差分近似すると $\frac{Y_{i-1}-2Y_i+Y_{i+1}}{(\Delta x)^2} - Y_i = -x_i$ となる．$N = 2$ のときは $\Delta x = 0.5$ で，変数は Y_1．方程式 $-(2+0.5^2)Y_1 = -0.5 \times 0.5^2$ を解いて $Y_1 = 0.055556$．$N = 4$ のときは $\Delta x = 0.25$，変数は Y_1，Y_2，Y_3．連立方程式

$$
\begin{bmatrix} -2+0.25^2 & 1 & 0 \\ 1 & -2+0.25^2 & 1 \\ 0 & 1 & -2+0.25^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \times 0.25^2 \\ -0.50 \times 0.25^2 \\ -0.75 \times 0.25^2 \end{bmatrix}
$$

を解いて $Y_1 = 0.0348852$，$Y_2 = 0.0563258$，$Y_3 = 0.0500368$．真の解は $y(x) = x - \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x})$ で，$y(0.25) = 0.0350476$，$y(0.5) = 0.0565906$，$y(0.75) = 0.0502758$.