

第2章章末問題解答

1. 直方体を用いて積分形のガウスの法則 $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = Q / \epsilon_0$ から微分形のガウスの

法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ を導出する過程は p.25, 2.5 節を参照。

微分形から積分形を導くには, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ を閉曲面 S 内の体積 V について

$$\text{積分する。} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv = \int_V (\rho / \epsilon_0) dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{答})$$

ここでベクトル解析のガウスの法則 $\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$ を用いた。

2. 積分形の電位保存の法則

$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ から微分形の電位保存

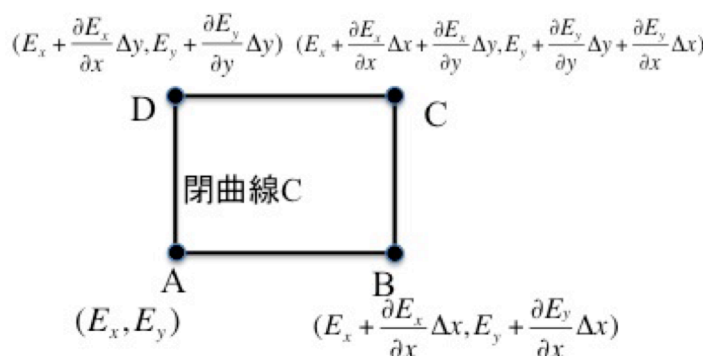
の法則 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を導くには, 2 辺が

Δx , Δy の長さの長方形に積分形

を当てはめる。長方形の周囲を閉曲線

C として,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{BC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{CD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{DA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^{\Delta x} (E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx) dx + \int_0^{\Delta y} (E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy) dy \\ &\quad + \int_{-\Delta x}^0 (E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx) dx + \int_{-\Delta y}^0 (E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy) dy \\ &= E_x \Delta x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\Delta x^2}{2} + E_y \Delta y + \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \frac{\Delta y^2}{2} \\ &\quad - E_x \Delta x - \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta x \Delta y - \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\Delta x^2}{2} - E_y \Delta y - \frac{\partial E_y}{\partial y} \frac{\Delta y^2}{2} \\ &= (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned}$$



より, xy 平面上では $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \nabla \times \mathbf{E} = 0$ (答)

微分形から積分形を導くには, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ をある閉路 C の内部 S で積分する。ベク

トル解析のストークスの定理 $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$ より,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{答})$$

3. (1) 球の表面に電荷があるので, 半径 r の同心球内の電荷は $r > a$ で Q ,

$a > r > 0$ で 0。故に, $r > a$ で $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $a > r > 0$ で $E_r = 0$ (答)

(2) 球の表面に電荷があるので, 半径 r の同心球内の電荷は $r > a$ で Q , $a > r > 0$

で $Q \frac{r^3}{a^3}$ 。故に, $r > a$ で $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $a > r > 0$ で $E_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}$ (答)

4. (1) 円柱の表面に電荷があるので, 半径 r の同軸円柱内の単位長さあたりの電荷は, $r > a$ で λ , $a > r > 0$ で 0。

故に, $r > a$ で $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, $a > r > 0$ で $E_r = 0$ (答)

(2) 円柱の表面に電荷があるので, 半径 r の同軸円柱内の単位長さあたりの電荷は,

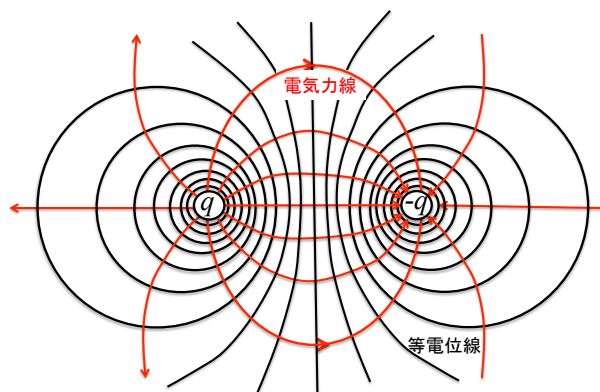
$r > a$ で λ , $a > r > 0$ で $\lambda \frac{r^2}{a^2}$ 。

故に, $r > a$ で $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, $a > r > 0$ で $E_r = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 a^2}$ (答)

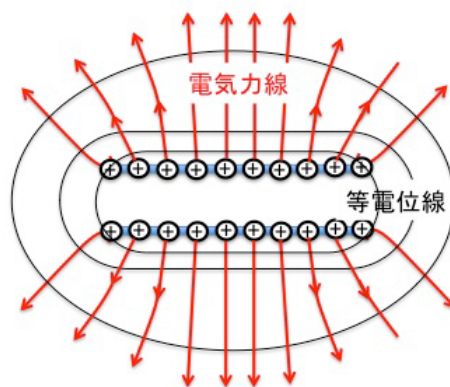
5. 真空中では, $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ なので, あり得ないのは(c)(d)。

6. 概略は以下の通り。

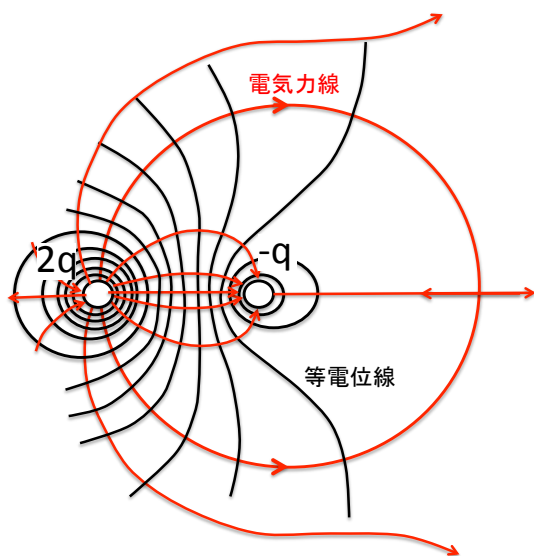
(a)



(b)



(c)



(d)

