演習問題解答

1.1

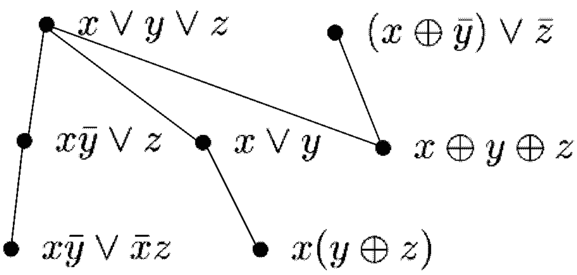


図 A1.1 論理式の間の包含関係を表すグラフ

1.2

各論理式の左辺と右辺が等しいことを以下のように証明できる。

- $\overline{x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz} = xy \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$ の証明

$$\begin{aligned} \overline{x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz} &= (\bar{x} \vee y)(y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \\ &= (\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee y \vee yz)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \\ &= (\bar{x}z \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \\ &= \bar{x}\bar{y}z \vee xy \vee y\bar{z} \end{aligned}$$

- $(x \oplus z) \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \geq \bar{x}\bar{y}$ の証明

$$\begin{aligned} (x \oplus z) \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \overline{\bar{x}\bar{y}} &= x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x \vee y \\ &= \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x \vee y && (\because x\bar{z} \vee x = x) \\ &= z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x \vee y && (\because \bar{x}z \vee x = z \vee x) \\ &= z \vee \bar{x}\bar{y} \vee x \vee y && (\because z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = z \vee \bar{x}\bar{y}) \\ &= z \vee \bar{y} \vee x \vee y && (\because \bar{x}\bar{y} \vee y = \bar{x} \vee y) \\ &= 1 \\ \therefore (x \oplus z) \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} &\geq \bar{x}\bar{y} \end{aligned}$$

- $F(x_1, y, z) \oplus F(x_2, y, z) = (x_1 \oplus x_2)(F(1, y, z) \oplus F(0, y, z))$ の証明

$$\begin{aligned} F(x_1, y, z) \oplus F(x_2, y, z) &= (x_1 F(1, y, z) \vee \overline{x_1} F(0, y, z)) \oplus (x_2 F(1, y, z) \vee \overline{x_2} F(0, y, z)) \\ &= (x_1 F(1, y, z) \oplus \overline{x_1} F(0, y, z)) \oplus (x_2 F(1, y, z) \oplus \overline{x_2} F(0, y, z)) \\ &= (x_1 \oplus x_2) F(1, y, z) \oplus (\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}) F(0, y, z) \\ &= (x_1 \oplus x_2) F(1, y, z) \oplus (x_1 \oplus x_2) F(0, y, z) \\ &= (x_1 \oplus x_2)(F(1, y, z) \oplus F(0, y, z)) \end{aligned}$$

2

2.1

(1)

$$\begin{aligned}(xyz)\vee(\bar{x}yz)\vee(\bar{x}y\bar{z}) &= (x\vee\bar{x})yz\vee(\bar{x}y\bar{z})\\ &= yz\vee(\bar{x}y\bar{z})\\ &= y(z\vee(\bar{x}\bar{z}))\\ &= y((z\vee\bar{x})(z\vee\bar{z}))\\ &= y(\bar{x}\vee z)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}M_{aj}(x,y,M_{aj}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})) &= \bar{x}y\vee\bar{y}M_{aj}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\vee\overline{M_{aj}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}x\\ &= \bar{x}y\vee\bar{y}(x\bar{y}\vee y\bar{z}\vee z\bar{x})\vee(\bar{x}\vee y)(\bar{y}\vee z)(\bar{z}\vee x)x\\ &= \bar{x}y\vee x\bar{y}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee(\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}z\vee yz)(\bar{z}\vee x)x\\ &= \bar{x}y\vee x\bar{y}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee(\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee xyz)x\\ &= \bar{x}y\vee x\bar{y}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee xyz\\ &= \bar{x}(y\vee\bar{y}z)\vee x(\bar{y}\vee yz)\\ &= \bar{x}(y\vee z)\vee x(\bar{y}\vee z)\\ &= \bar{x}y\vee x\bar{y}\vee\bar{x}z\vee xz\\ &= x\oplus y\vee z\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{aj}(x,y,z)}{\partial x} &= M_{aj}(0,y,z)\oplus M_{aj}(1,y,z)\\ &= (y\bar{z}\vee z)\oplus(\bar{y}\vee y\bar{z})\\ &= (y\bar{z}\vee z)\overline{(\bar{y}\vee y\bar{z})}\vee\overline{(y\bar{z}\vee z)}(\bar{y}\vee y\bar{z})\\ &= (y\bar{z}\vee z)y(\bar{y}\vee z)\vee(\bar{y}\vee z)\bar{z}(\bar{y}\vee y\bar{z})\\ &= (y\bar{z}\vee z)yz\vee\bar{y}\bar{z}(\bar{y}\vee y\bar{z})\\ &= yz\vee\bar{y}\bar{z}\end{aligned}$$

2.2

(1)$F(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$

極小項表現

$$F(x,y,z) \;=\; xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$$

極大項表現

$$F(x,y,z) \;=\; (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)$$

(2)$F(x,y,z) = (x \vee y)(\bar{y} \vee z)$

極小項表現

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \;&=\; (x \vee y)(\bar{y} \vee z) \\ &=\; x\bar{y} \vee xz \vee yz \\ &=\; xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

極大項表現

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \;&=\; \overline{(xy\bar{z})} \cdot \overline{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})} \cdot \overline{(\bar{x}\bar{y}z)} \cdot \overline{(\bar{x}y\bar{z})} \\ &=\; (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z) \end{aligned}$$

(3)$F(x,y,z) = \overline{(x\bar{y}) \vee (y\bar{z}) \vee (x\bar{z})}$

極小項表現

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \;&=\; \overline{(x\bar{y}) \vee (y\bar{z}) \vee (x\bar{z})} \\ &=\; \overline{x\bar{y}} \cdot \overline{y\bar{z}} \cdot \overline{x\bar{z}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee z) \\
&= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}yz \vee yz \\
&= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz
\end{aligned}
$$

極大項表現

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \overline{(\bar{x}y\bar{z})} \cdot \overline{(x\bar{y}z)} \cdot \overline{(xy\bar{z})} \cdot \overline{(x\bar{y}\bar{z})} \\
&= (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)
\end{aligned}
$$

(4)$F(x,y,z) = (x \vee \bar{y}) \oplus \bar{x}z$

極小項表現

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= (x \vee \bar{y}) \oplus \bar{x}z \\
&= \overline{(x \vee \bar{y})}\bar{x}z \vee (x \vee \bar{y})\overline{(\bar{x}z)} \\
&= \bar{x}y\bar{x}z \vee ((x \vee \bar{y})(x \vee \bar{z})) \\
&= \bar{x}yz \vee (x \vee \bar{y}\bar{z}) \\
&= \bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}
\end{aligned}
$$

極大項表現

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \overline{(\bar{x}\bar{y}z)} \cdot \overline{(\bar{x}y\bar{z})} \\
&= (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)
\end{aligned}
$$

2.3

各論理式を指定された形式で表わすと次のようになる。

(1) $x \oplus yz = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$ (極小項表現)

(2) $(xy \oplus \bar{y}z) \vee \bar{z} = x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ (極大項表現)

(3) $x(y \oplus \bar{z}) = \overline{\overline{x\bar{y}\bar{z}}\,\overline{xyz}}$ (NAND だけで表現)

(4) $x\bar{y} \vee \bar{x}z = \overline{\overline{x \vee z} \vee \overline{\overline{\overline{y \vee 0} \vee \overline{x \vee 0}} \vee \overline{\overline{y \vee 0} \vee z}}}$ (NOR だけで表現)

2.4

(1) $x \vee y \leq z$ は $\overline{x \vee y} \vee z = 1$ と同値である。これは論理代数方程式の標準形であるのでこの左辺を $F(x, y, z)$ として以下のように解ける。

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \overline{x \vee y} \vee z \\ &= \bar{x}\bar{y} \vee z \\ F(0,y,z) &= \bar{y} \vee z \\ F(1,y,z) &= 0 \vee z = z \\ F(0,y,z) \vee F(1,y,z) &= \bar{y} \vee z \end{aligned}$$

よって x に解が存在するために z, y が満たすべき必要十分条件は、

$$\bar{y} \vee z = 1 \Leftrightarrow z \geq y$$

となり、これを満たす y, z は $(y, z) = (0,0),\ (0,1),\ (1,1)$ である。このとき x の解は、α を任意の値として、

$$\begin{aligned} x &= \overline{F(0,y,z)} \vee F(1,y,z)\alpha \\ &= 0 \vee z\alpha \\ &= z\alpha \end{aligned}$$

これより解は、$(x, y, z) = (0,0,0),\ (0,0,1),\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1)$ となる。

(2) 「$x \vee y = 1$ かつ $\bar{x}z \geq y$」は $(x \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x}z) = 1$ と同値である。これは論理代数方程式の標準形であるのでこの左辺を $F(x, y, z)$ として以下のように解ける。

$$
\begin{aligned}
F &= (x \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x}z) \\
F(0,y,z) &= y(\bar{y} \vee z) = yz \\
F(1,y,z) &= \bar{y} \\
F(0,y,z) \vee F(1,y,z) &= yz \vee \bar{y} = z \vee \bar{y}
\end{aligned}
$$

よって x に解が存在するために z, y が満たすべき必要十分条件は、

$$z \vee \bar{y} = 1 \Leftrightarrow z \geq y$$

このとき x の解は、α を任意の値として、

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{F(0,y,z)} \vee F(1,y,z)\alpha \\
&= \overline{yz} \vee \bar{y}\alpha \\
&= \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{y}\alpha \\
&= \bar{y} \vee \bar{z}
\end{aligned}
$$

ここで解の存在条件、$z \geq y$ から、$\bar{y} \geq \bar{z}$ であるので次式が得られる。

$$x = \bar{y}$$

また $y,\ z$ を $z \vee \bar{y} = 1$ を解くと $(y,z) = (0,0),\ (0,1),\ (1,1)$ となるので解は、$(x,y,z) = (1,0,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)$ となる。

(3) $x \oplus \bar{y}z = 1$ は論理代数方程式の標準形になっているのでこの左辺を $F(x,y,z)$ として以下のように解ける。

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= x \oplus \bar{y}z \\
F(0,y,z) &= \bar{y}z \\
F(1,y,z) &= y \vee \bar{z} \\
F(0,y,z) \vee F(1,y,z) &= 1
\end{aligned}
$$

よって z, y がどんな値を取っても x に解が存在する。x の解は、α を任意の値として、

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{F(0,y,z)} \vee F(1,y,z)\alpha \\
&= y \vee \bar{z} \vee (y \vee \bar{z})\alpha \\
&= y \vee \bar{z}
\end{aligned}
$$

これより解は、$(x,y,z)=(1,0,0),\ (0,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)$ となる。

3.1

閾値3の閾値関数 $F_3(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ は、閾値2の閾値関数 $F_2(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ に包含されるから、AND を取ると包含される側の $F_3(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ となり、OR を取ると包含する側の $F_2(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ になる。

3.2

$(xy \oplus \bar{y}z) \vee \bar{z}$ の x, y, z のそれぞれに 0 と 1 を代入して包含関係を調べると次のようになる。

$x = 0$ とすると $\bar{y}z \vee \bar{z} = \bar{y} \vee \bar{z}$、$x = 1$ とすると 1 となり後者が前者を包含するので x について正となる。

$y = 0$ とすると 1 となり、$y = 1$ とすると $x \vee \bar{z}$ となり前者が後者を包含するので y について負となる。

$z = 0$ とすると 1 となり、$z = 1$ とすると $xy \oplus \bar{y}$ となり前者が後者を包含するので z について負となる。

以上より、 $(xy \oplus \bar{y}z) \vee \bar{z}$ はユネイトである。

3.3

x, y, z の 3 つの変数からなる対象関数は入力中の 1 の個数のみに依存して出力を定めることになる。この場合、入力変数は 3 つなので入力中の 1 の個数は 0,1,2,3 のいずれかであり、そのおのおのについて出力は 0 または 1 の値を取る。さらに自己双対であることから、1 の個数 0 に対して出力を決めると 1 の個数 4 に対する出力はそれを反転したものに定まってしまう。また、1 の個数 1 に対して出力を決めると 1 の個数 3 に対する出力はそれを反転したものに定まってしまう。したがって、関数の出力は、1 の個数 0 の場合と 1 の個数 1 の場合にしか独立に決められず、関数はこれらについて出力を 0 か 1 かに定める組み合わせとして、次の 4 通りになる。

$xy \vee xz \vee yz$,

$x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz$,

$\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

$\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$

3.4

線形関数 $f(x_3, x_2, x_1) = a_3x_3 \oplus a_2x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_0$ の双対関数は、次のように変形することで線形関数となることが分かる。

$$\begin{aligned}\overline{f(\bar{x_3},\bar{x_2},\bar{x_1})} &= \overline{a_3(x_3\oplus 1)\oplus a_2(x_2\oplus 1)\oplus a_1(x_1\oplus 1)\oplus a_0} \\ &= a_3(x_3\oplus 1)\oplus a_2(x_2\oplus 1)\oplus a_1(x_1\oplus 1)\oplus a_0\oplus 1 \\ &= a_3x_3\oplus a_2x_2\oplus a_1x_1\oplus a_3\oplus a_2\oplus a_1\oplus a_0\oplus 1\end{aligned}$$

3.5

3 変数の関数 $f(x,y,z)$ の範囲で次の関数の具体例を 1 つ示すと次のようになる。

(1)$xy\vee\bar{z}$ の双対関数： $(x\vee y)\bar{z}$

(2)ユネイト関数： 例えば、$x\vee\bar{y}\vee z$

(3)単調関数： 例えば、$x\vee y\vee z$

(4)自己双対関数で $f(0,0,0)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=f(1,1,0)=0$ を満たすもの： $yz\vee\bar{x}(y\vee z)$

(5)対称関数： 例えば、xyz

(6)線形関数： 例えば、$x\oplus y\oplus z$

87)閾値 2 の閾値関数： $xy\vee yz\vee xz$

X_5X_4 \ $X_3X_2X_1$	000	001	011	010	110	111	101	100
00						1		
01			1		1	1	1	
11		1	1	1	1	1	1	1
10			1		1	1	1	

図 A4.1.1 関数 $M_{aj}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ のカルノー図

X_5X_4 \ $X_3X_2X_1$	000	001	011	010	110	111	101	100
00			1		1	1	1	
01		1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1
10		1	1	1	1	1	1	1

図 A4.1.2 関数 $H_2(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ のカルノー図

4.1

(1)関数 $M_{aj}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ のカルノー図から図 4A.1.1 の簡単化した NOT-AND-OR 形式を得る。

$$\begin{aligned} M_{aj}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) \quad &= \quad x_3x_2x_1 \vee x_4x_2x_1 \vee x_5x_2x_1 \vee \\ &\quad\quad x_4x_3x_1 \vee x_5x_3x_1 \vee \vee x_5x_4x_1 \vee \\ &\quad\quad x_4x_3x_2 \vee x_5x_3x_2 \vee x_5x_4x_2 \vee x_5x_4x_3 \end{aligned}$$

(2) 関数 $H_2(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ のカルノー図とこの関数の双対関数 $H_{2d}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ (閾値 4 の閾値関数) のカルノー図は、図 A4.1.2、図 A4.1.3 のようになる。この双対関数のカルノー図からから次のように簡単化した NOT-AND-OR 形式を得て、さらにその AND と OR を入れ替えれば、それが関数 $H_2(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ の NOT-OR-AND 形式で簡単化した式となる。

$$\begin{aligned} H_{2d}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) \quad &= \quad x_4x_3x_2x_1 \vee x_5x_3x_2x_1 \vee x_5x_4x_2x_1 \vee \\ &\quad\quad x_5x_4x_3x_1 \vee x_5x_4x_3x_2 \end{aligned}$$

$x_3x_2x_1$ \ x_5x_4	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01						1		
11			1		1	1	1	
10						1		

図 A4.1.3 関数 $H_{2d}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ のカルノー図

$x_3x_2x_1$ \ $u\,x_5x_4$	000	001	011	010	110	111	101	100
000			*		*	*	*	
001		*	*	*	*	*	*	*
011	*	*	*	*	*	*	*	*
010	*	*	*	*	*	*	*	*
110			1		1	1	1	
111		1	1	1	1	1	1	1
101	*		1		1	1	1	
100	*	*		*		1		*

図 A4.1.4 関数 $u = H_2(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ を既存回路とする場合のカルノー図

$$
\begin{aligned}
H_2(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) \quad = \quad & (x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1)(x_5 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1)(x_5 \vee x_4 \vee x_2 \vee x_1) \\
& (x_5 \vee x_4 \vee x_3 \vee x_1)(x_5 \vee x_4 \vee x_3 \vee x_2)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
M_{aj}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) \quad = \quad x_5 M_{aj}(1, x_4, x_3, x_2, x_1) \vee \overline{x_5} M_{aj}(0, x_4, x_3, x_2, x_1)
$$

(4)　$u = H_2(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ を既存回路として、これに論理回路を追加して $M_{aj}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ を構成する場合には図 A4.1.4 のカルノー図を用いる。

図 A4.1.4 のカルノー図から、この例においては、既存回路は簡単化のために役立てることはできないことが分かり、(1) で求めた次式によって $M_{aj}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ を構成することになる　。

$$\begin{aligned} M_{aj}(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) \quad = \quad & x_3x_2x_1 \vee x_4x_2x_1 \vee x_5x_2x_1 \vee \\ & x_4x_3x_1 \vee x_5x_3x_1 \vee \vee x_5x_4x_1 \vee \\ & x_4x_3x_2 \vee x_5x_3x_2 \vee x_5x_4x_2 \vee x_5x_4x_3 \end{aligned}$$

4.2

表 4.10 の関数について，極小項を肯定型変数の数に応じて分類しながら統合を進めると図 A4.1.5 のようになる．

こうして NOT-AND 項の統合を進めた結果，それ以上統合できなくなってチェック印が付かなかったものが主項である．こうして求めた主項を以下に示す．

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_5\bar{x}_3\bar{x}_1 & \bar{x}_5\bar{x}_3\bar{x}_2 & \bar{x}_5\bar{x}_4\bar{x}_3 \\ \bar{x}_5\bar{x}_2x_1 & \bar{x}_5\bar{x}_4x_2 & \bar{x}_5x_2\bar{x}_1 \\ x_4\bar{x}_3\bar{x}_1 & \bar{x}_5x_3x_1 & x_4x_2\bar{x}_1 \\ x_5\bar{x}_4x_3 & x_5x_3\bar{x}_1 & x_5x_4\bar{x}_1 \\ x_5x_4x_2 & x_5x_2x_1 & \\ \bar{x}_4x_1 & x_3x_2 & \end{array}$$

これらの主項の中からできるだけ簡単なものをできるだけ少数個選んで目的の関数を表現するため，今度はドントケアを 0 の方に定め，関数値 1 に対応する極小項と，上記の主項との間の包含図を作ると図 A4.2.1 のようになる．さらに包含図を簡約化する手続きとして前述した①，②，③のうち，①と③だけを適用して包含図を簡単化すると，図 A4.2.2 を得る．さらに②については簡単化の候補を失わないように注意しながら適用すると，図 A4.2.3 のように簡単化され，この包含図から，目的の関数の表現に必須の主項として，$x_3x_2, \bar{x}_5\bar{x}_2x_1, x_5x_3\bar{x}_1, x_5x_2x_1$ が選ばれ，またこの 4 つの主項だけで目的の関数の表現に十分であることが分かる．したがって，最終的に表**??**に定義した関数を簡単化した NOT-AND-OR 形式で実現した結果として次の論理式を得る．

$$F(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = x_3x_2 \vee \bar{x}_5\bar{x}_2x_1 \vee x_5x_3\bar{x}_1 \vee x_5x_2x_1$$

4.3

(2)y_1y_2 の主項を共用するようにして y_1，y_2 を計算する論理式と回路図 (図 A4.3) が以下のように得られる。

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_3\bar{x_2} \vee \bar{x_3}x_2 \\
y_2 &= \bar{x_2}x_1 \vee \bar{x_3}x_2
\end{aligned}
$$

4.4

(1)(2)(3) NOT ゲート、AND ゲート、OR ゲートを NAND ゲートだけで現わすと回路と式は図 A4.4 のようになる。また NOT-AND-OR 形式で表された $f(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z$ は、この関係により、図 A4.4 のように NAND の 3 段の回路で表せる。

- ヘッド $H_1 = x,\ H_2 = z$ とテイル $\tau_1 = \bar{y}\bar{z},\ tau_2\bar{x}$ を用いて $H_1\tau_1 \vee H_2 tau_2$ の標準形式で表される。

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x\bar{y}\bar{z} \vee z\bar{x} \\
&= x\bar{y}\overline{xz} \vee z\overline{xz}
\end{aligned}
$$

- 上記の標準形を次のように変形して共通項 $\bar{x}z$ を作る。上の変形前と変形後の式はそれぞれ次のように NAND だけで表現でき、後者では、$\overline{xz}$ を共用することで NAND ゲートの個数が一つ減る。

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \overline{\overline{x\bar{y}\bar{z}}\,\overline{z\bar{x}}} \\
&= \overline{\overline{x\bar{y}\overline{xz}}\,\overline{z\overline{xz}}}
\end{aligned}
$$

4.5

次の 3 入力 x_3, x_2, x_1 に関する論理関数を既存の回路 $u = x_1 \vee x_2\bar{x_3}$ を利用して表す場合、u を入力変数の一つとみなして図 A4.5 のカルノー図を作り、簡単化した論理式を得る。その結果いくつか同等の簡単さの回路が得られるが、そのうちの一つとして、例えば $y = u\bar{x_3} \vee u\bar{x_2}$ を選ぶとよい。

$p=0$	0	0	0	0	0	∨
$p=1$	0	0	0	0	1	∨
	0	0	0	1	0	∨
	0	1	0	0	0	∨
$p=2$	0	0	0	1	1	∨
	0	0	1	0	1	∨
	0	1	0	0	1	∨
	1	0	0	0	1	∨
	0	0	1	1	0	∨
	0	1	0	1	0	∨
	1	0	1	0	1	∨
	1	1	0	0	0	∨
$p=3$	0	0	1	1	1	∨
	1	0	0	1	1	∨
	0	1	1	0	1	∨
	1	0	1	0	1	∨
	0	1	1	1	0	∨
	1	0	1	1	0	∨
	1	1	0	1	0	∨
	1	1	1	0	0	∨
$p=4$	0	1	1	1	1	∨
	1	0	1	1	1	∨
	1	1	0	1	1	∨
	1	1	1	1	0	∨
$p=5$	1	1	1	1	1	∨

(a)

$p=0$	0	0	0	0	−	∨
	0	0	0	−	0	∨
	0	−	0	0	0	∨
$p=1$	0	0	0	−	1	∨
	0	0	−	0	1	∨
	0	−	0	0	1	∨
	−	0	0	0	1	∨
	0	0	0	1	−	∨
	0	0	−	1	0	∨
	0	0	−	1	0	∨
	0	1	0	0	−	∨
	0	1	0	−	0	∨
	−	1	0	0	0	∨
$p=2$	0	0	−	1	1	∨
	−	0	0	1	1	∨
	0	0	1−		1	∨
	0	−	1	0	1	∨
	−	-4	3	-2	1	∨
	0	1	−	0	1	∨
	1	0	0	−	1	∨
	1	0	−	0	1	∨
	0	0	1	1−		∨
	0	−	1	1	0	∨
	−	0	1	1	0	∨
	0	1	−	1	0	∨
	−	1	0	1	0	∨
	1	0	1	0	−	∨
	1	0	1	−	0	∨
	1	−	1	0	0	∨
	1	1	0	−	0	∨
	1	1	−	0	0	∨
$p=3$	0	−	1	1	1	∨
	−	0	1	1	1	∨
	1	0	−	1	1	∨
	1	−	0	1	1	∨
	0	1	1	−	1	∨
	1	0	1	−	1	∨
	0	1	1	1	−	∨
	−	1	1	1	0	∨
	1	0	1	1	−	∨
	1	−	1	1	0	∨
	1	1	0	1	−	∨
	1	1	−	1	0	∨
	1	1	1	−	0	∨
$p=4$	−	1	1	1	1	∨
	1	−	1	1	1	∨
	1	1	−	1	1	∨
	1	1	1	1	−	∨

(b)

$p=0$	0	0	0	−	−	
	0	−	0	0	−	
	0	−	0	−	0	
$p=1$	0	0	−	−	1	∨
	−	0	0	−	1	∨
	0	−	−	0	1	
	−	0	−	0	1	∨
	0	0	−	1	−	
	0	−	−	1	0	
	−	1	0	−	0	
$p=2$	−	0	−	1	1	∨
	0	−	1	−	1	
	−	0	1	−	1	∨
	1	0	−	−	1	∨
	0	−	1	1	−	∨
	−	0	1	1	−	∨
	−	−	1	1	0	∨
	−	1	−	1	0	
	1	0	1	−	−	
	1	−	1	−	0	
	1	1	−	−	0	
$p=3$	−	−	1	1	1	∨
	1	−	−	1	1	
	−	1	1	1	−	∨
	1	−	1	1	−	∨
	1	1	−	1	−	

(c)

$p=1$	−	0	−	−	1
$p=2$	−	−	1	1	−

(d)

図 A4.1.5 NOT-AND 項のグループ分けと統合

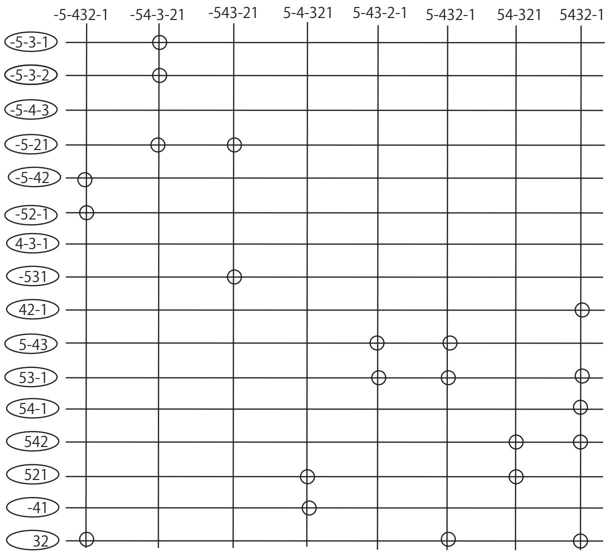


図 A4.2.1　関数値 1 に対する極小項と主項の間の包含図

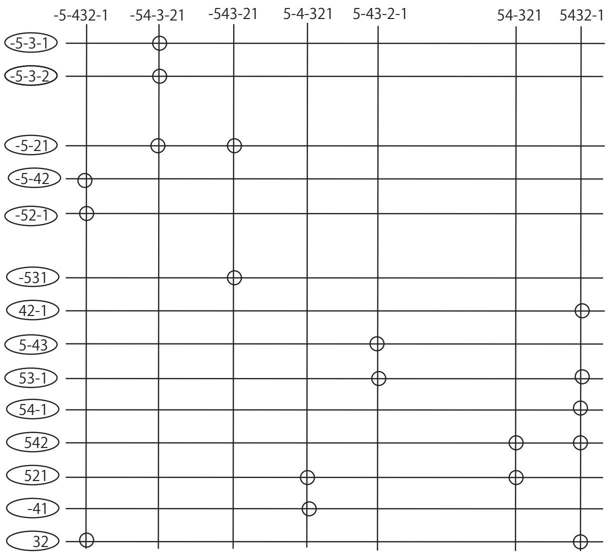


図 A4.2.2　関数値 1 に対する極小項と主項の間の包含図（①と③で簡約化したもの）

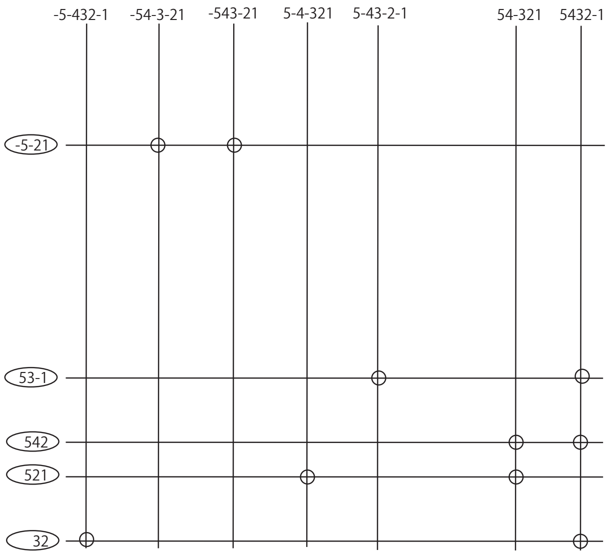


図 A4.2.3　関数値 1 に対する極小項と主項の間の包含図（②で簡約化したもの）

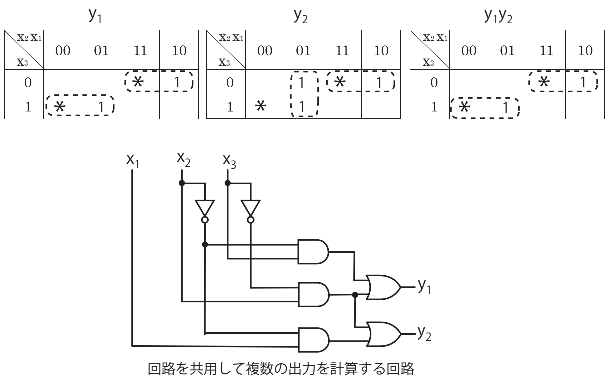
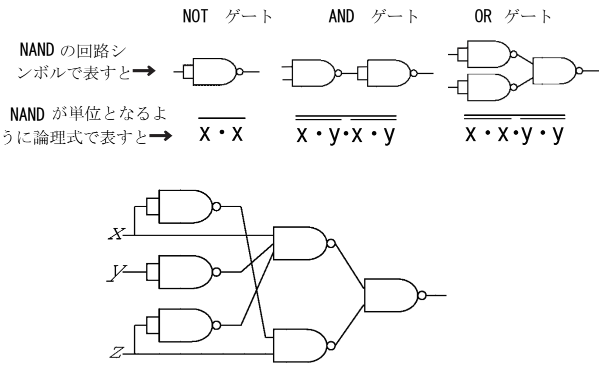


図 A4.3　y_1, y_2, y_1y_2 のカルノー図と回路を共用しながら y_1, y_2 を計算する論理回路



NOT-AND-OR 形式の回路と等価な NAND 形式の回路

図 A4.4　NOT、AND、OR の NAND による表現と NAND による回路

$u\,x_3$ \ $x_2\,x_1$	00	01	11	10
00		*	*	*
01	*	*	*	
11	*	1		*
10	*	1	*	1

図 A4.5　追加関数を求めるためのカルノー図