1章C問題の解答

$\boxed{52}$ **(1)** 与式$=(z-y)x^3-(z^3-y^3)x+(yz^3-y^3z)$　（文字 x について整理）

$$=(z-y)x^3-(z-y)(z^2+zy+y^2)x+(z-y)(z+y)yz$$

$$=(z-y)\{x^3-(z^2+zy+y^2)x+(z+y)zy\}$$　（共通因数でくくる）

（中括弧の中の式は x については３次、y については２次である）

$$=(z-y)\{(z-x)y^2+(z^2-xz)y+(x^3-xz^2)\}$$（文字 y について整理）

$$=(z-y)\{(z-x)y^2+z(z-x)y-x(x+z)(z-x)\}$$

$$=(z-y)(z-x)\{y^2+zy-x(x+z)\}$$　（共通因数でくくる）

$$=(z-y)(z-x)(y-x)(y+x+z)$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

答　$(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

(2) 与式$=a^4+a^2(-2b^2-8)+(b^4-8b^2+16)$　（文字 a について整理）

ここで $b^4-8b^2+16=(b^2-4)^2=\{(b+2)(b-2)\}^2=(b+2)^2(b-2)^2$

$-2b^2-8=-\{(b+2)^2+(b-2)^2\}$ を用いて

与式$=\{a^2-(b+2)^2\}\{a^2-(b-2)^2\}=\cdots$

答　$(a+b+2)(a+b-2)(a-b+2)(a-b-2)$

(3) １つの文字について整理した後、たすきがけを行う.

答　$(x+y+z)(xy+yz+zx)$

(4) 与式$=\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$

$$=(b+c)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$

$$=\cdots=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)=\cdots$$

答　$3(a+b)(b+c)(c+a)$

(5) 公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ より

$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$ となるので、

与式$=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$$

共通因数 $a+b+c$ でくくって、さらに計算する.

答　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\boxed{53}$ ※問題文を訂正いたします.

訂正箇所：問題文で「余りが $4^7(x-7)$ である」の部分を「余りが $4^7(x-4)$ である」に訂正.

理由：元のままでは、基礎数学１章の知識で解くことが相当難しくなるため.

$(x-4)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおくと、

$$x^7(x^2+ax+b)=(x-4)^2Q(x)+4^7(x-4)\ \cdots ①$$

両辺に $x=4$ を代入.

$$4^7(4^2+4a+b)=0\quad これより\ b=-4a-16\ \cdots ②$$

① の左辺へ②を代入した上で、左辺を因数分解.

$$x^7(x-4)(x+a+4)=(x-4)^2Q(x)+4^7(x-4)$$

両辺を $x-4$ で割ると、$x^7(x+a+4)=(x-4)Q(x)+4^7$

両辺に $x=4$ を代入すると a が求まり、それを②へ代入すると b が求まる.

答　$a=-7,\ \ b=12$

$\boxed{54}$ x^2+3x+2, x^2+4x+3 で割ったときの商を $R_1(x), R_2(x)$ とし、

x^2+5x+6 で割ったときの商を $R_3(x)$,余りを $ax+b$ とすると、

$$f(x)=(x^2+3x+2)R_1(x)+2x+3\ \cdots ①$$

$$f(x)=(x^2+4x+3)R_2(x)-x\ \cdots ②$$

$$f(x)=(x^2+5x+6)R_3(x)+ax+b\ \cdots ③$$

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$, $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ に注目して、①と③の両辺に $x=-2$ を代入して整理することで、

$$-2a+b=-1\ \cdots ④$$

②と③の両辺に $x=-3$ を代入して整理することで、

$$-3a+b=3\ \cdots ⑤$$

④⑤を解けば a,b が求まる.

答　$-4x-9$

$\boxed{55}$　第 1 項、第 2 項それぞれを有理化した上で計算.

答　$\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

$\boxed{56}$　(1)　先に各項の分母、分子を因数分解しておくと良い.

答　$\dfrac{-3x+4}{(x-2)(x-3)}$

(2)　先に $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}}$ を求めておくと良い.　答　2

$\boxed{57}$　**※問題文を訂正いたします.**

訂正箇所 : 問題文で「いずれも無理数であるようなある自然数 m,n」の部分を「いずれも無理数であるような自然数 m,n」に訂正.

理由 : $\sqrt{m},\sqrt{n},\sqrt{mn}$ がいずれも無理数である様な全ての自然数 m,n について成り立つ性質を証明する問題である.

有理数 a,b,c,d が

$$a\sqrt{m}+b\sqrt{n}+c\sqrt{mn}=d \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

を満たす場合、$a=0,\ \ b=0,\ \ c=0$ が成り立つことを示す.

まず $a=0$ を示すために、$a\neq 0$ と仮定して矛盾を導く.そのために $a^2-c^2n\neq 0$ の場合と $a^2-c^2n=0$ の場合に分ける.

・$a^2-c^2n\neq 0$ の場合

$(a-c\sqrt{n})(a+c\sqrt{n})\neq 0$ より $a-c\sqrt{n}\neq 0$ かつ $a+c\sqrt{n}\neq 0$.

①より　$b\sqrt{n}-d=-(a\sqrt{m}+c\sqrt{mn})=-\sqrt{m}(a+c\sqrt{n})$

$$\sqrt{m}=-\frac{b\sqrt{n}-d}{a+c\sqrt{n}}=-\frac{(b\sqrt{n}-d)(a-c\sqrt{n})}{(a+c\sqrt{n})(a-c\sqrt{n})}=-\frac{ab\sqrt{n}-bcn-ad+cd\sqrt{n}}{a^2-c^2n}$$

$$=\frac{ad+bcn}{a^2-c^2n}-\frac{ab+cd}{a^2-c^2n}\sqrt{n}$$

$$\sqrt{m}+\frac{ab+cd}{a^2-c^2n}\sqrt{n}=\frac{ad+bcn}{a^2-c^2n} \quad ・・・②$$

a,b,c,d,n は有理数だから $\frac{ab+cd}{a^2-c^2n}$, $\frac{ad+bcn}{a^2-c^2n}$ いずれも有理数.

$\dfrac{ab+cd}{a^2-c^2n}\neq 0$ ならば 問 $\boxed{51}$ より、$\dfrac{ad+bcn}{a^2-c^2n}$ は無理数となり矛盾.

$\dfrac{ab+cd}{a^2-c^2n}=0$ ならば、②へ代入して $\sqrt{m}=\dfrac{ad+bcn}{a^2-c^2n}$, $\sqrt{m}$ は有理数となり

仮定に矛盾.従って、$a^2-c^2n\neq 0$ ならば矛盾が起きる.

・ $a^2-c^2n=0$ の場合

仮定 $a\neq 0$ より $c\neq 0$ となり、$n=\dfrac{a^2}{c^2}=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2, \sqrt{n}=\pm\dfrac{a}{c}$. a,c は有理

数だから $\sqrt{n}$ も有理数となり仮定に矛盾する.

以上より $a\neq 0$ と仮定すると $a^2-c^2n\neq 0, a^2-c^2n=0$ いずれの場合も矛盾するので、$a=0$ が成り立つ. 同様に $b=0$ も成り立つ. 従って ①より $c\sqrt{mn}=d$ となる. $c\neq 0$ と仮定すると $\sqrt{mn}=\dfrac{d}{c}$、また $\dfrac{d}{c}$ は有理数だから $\sqrt{mn}$ も有理数となり仮定に矛盾する. 従って $c=0$ が成り立つ.

以上より、$a=0,b=0,c=0$ が成り立つ.