第２章　C発展問題の解答

$\boxed{31}$ **解．** ２つの解を $\alpha,\ 3\alpha$ とすると，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha=4\alpha=4(m-1)\\ 3\alpha\cdot\alpha=6m+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=m-1 & \cdots①\\ \alpha^2=2m+1 & \cdots②\end{cases}$$

①を②に代入すると　$(m-1)^2=2m+1\Leftrightarrow m(m-4)=0$　　$\therefore m=0,\ 4$

(i) $m=0$　のとき　①より $\alpha=-1$

(ii) $m=4$　のとき　①より $\alpha=3$

以上より　$\begin{cases}m=0\text{のとき } x=-1,\ -3\\ m=4\text{のとき } x=3,\ 9\end{cases}$　（答）

$\boxed{32}$ **解．** $\begin{cases}x+y=p & \cdots①\\ x^2+y^2=4 & \cdots②\end{cases}$　①より $y=p-x$ だから，②に代入して

$$x^2+(p-x)^2=4\Leftrightarrow 2x^2-2px+p^2-4=0\quad\cdots③$$

条件より，③の判別式 $\dfrac{D}{4}=p^2-2(p^2-4)=0\Leftrightarrow p^2=8$

$p>0$ より，$p=2\sqrt{2}$．これを③に代入

$$2x^2-4\sqrt{2}x+4=0\Leftrightarrow(x-\sqrt{2})^2=0\qquad\therefore x=\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}$$

以上より $p=2\sqrt{2},\ (x,\ y)=(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$　（答）

$\boxed{33}$ **解．** (1) 両辺に x^3+1 をかけて　$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$

$$\therefore 1=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C$$

係数を比較すると　$\begin{cases}A+B=0 & \cdots①\\ -A+B+C=0 & \cdots②\\ A+C=1 & \cdots③\end{cases}$

①＋③より $2A+B+C=1\ \cdots④$　　④－②より　$3A=1$　$\therefore A=\dfrac{1}{3}$

よって　①，③より　$B=-\dfrac{1}{3},\ C=\dfrac{2}{3}$　　$\therefore A=\dfrac{1}{3},\ B=-\dfrac{1}{3},\ C=\dfrac{2}{3}$　（答）

(2) 両辺に $(x-1)^2(x+2)$ をかけると

$$4x^2-3x+3=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$

$$\therefore 4x^2-3x+3=(B+C)x^2+(A+B-2C)x+2A-2B+C$$

(1)と同様にして，係数を比較して解くと　$A=\dfrac{4}{3},\ B=\dfrac{11}{9},\ C=\dfrac{25}{9}$　（答）

$\boxed{34}$ **解．** （1）　（i）$x-2 \geqq 0$ のとき，つまり $x \geqq 2$ のとき

$$x^2+x-2=4 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)=0$$

$x \geqq 2$ より $x=2$

（ii）$x-2<0$ のとき，つまり $x<2$ のとき

$$x^2-x+2=4 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \qquad x<2 \text{ より } x=-1$$

（i），（ii）より　$x=2,\ -1$　（答）

（2）（i）$x^2+x-6 \geqq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \geqq 0$ のとき，つまり $x \leqq -3,\ x \geqq 2$ …① のとき

$$x^2+x-6 \leqq x+1 \Leftrightarrow x^2-7 \leqq 0 \qquad \therefore -\sqrt{7} \leqq x \leqq \sqrt{7} \quad \cdots②$$

①，②より　$2 \leqq x \leqq \sqrt{7}$

（ii）$x^2+x-6<0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)<0$ のとき，つまり $-3<x<2$ …③ のとき

$$-x^2-x+6 \leqq x+1 \Leftrightarrow x^2+2x-5 \geqq 0 \qquad \therefore x \leqq -1-\sqrt{6},\ x \geqq -1+\sqrt{6} \quad \cdots④$$

③，④より $-1+\sqrt{6} \leqq x < 2$

（i），（ii）より　$-1+\sqrt{6} \leqq x \leqq \sqrt{7}$　（答）

$\boxed{35}$ **解．** $z-2=\sqrt{3}i \Rightarrow (z-2)^2=-3 \Rightarrow z^2-4z+7=0$

$$z^4-4z^3+7z^2=z^2(z^2-4z+7)=0 \qquad \therefore 0 \quad \text{（答）}$$

$\boxed{36}$ **解．** $z=a+bi$（$a,\ b$ は実数）とおくと

$$z^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i=i$$

複素数の相等より $\begin{cases} a^3-3ab^2=a(a^2-3b^2)=0 & \cdots① \\ 3a^2b-b^3=1 & \cdots② \end{cases}$

①より　$a=0$　または　$a^2=3b^2$　であるから

（i）$a=0$　のとき　②より　$b^3=-1$．b は実数だから $b=-1$．

（ii）$a^2=3b^2$　のとき　②より　$b^3=\dfrac{1}{8}$．b は実数だから $b=\dfrac{1}{2}$．

よって $a^2=\dfrac{3}{4}$　$\therefore a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

以上より，$z=-i,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　（答）