第 4 章 C 問題解答例

36. $X = 3^x + 3^{-x}$ とおくと，相加平均と相乗平均の関係より $X = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$．ただし，等号は $3^x = 3^{-x}$ すなわち $x = 0$ のときに成立．$y = -(X-2)^2 + 10$ より，$X = 2$ のとき，すなわち $x = 0$ のとき，y は最大値 10 をとる．

37. $X = \log_2 x$ とおくと，$y = (2-X)(X-1) = -\left(X - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$．ゆえに $X = \dfrac{3}{2}$ のとき，すなわち $x = 2\sqrt{2}$ のとき，最大値 $y = \dfrac{1}{4}$ をとる．

38. $X = 2^x$，$Y = 2^y$ とおくと，X，Y はともに正であり，連立方程式は $X - Y = 2^3$，$XY = 2^7$ と表される．Y を消去して，$X(X - 2^3) = 2^7$ すなわち，$(X-16)(X+8) = 0$．$X > 0$ より $X = 16$，このとき $Y = 8$． ゆえに $(x, y) = (4, 3)$．

39. 第 2 式より，$xy = 2^4$． 第 1 式 $x + y = 10$ と連立させて y を消去すると，$x(10 - x) = 2^4$． したがって，$x = 2,\ 8$．ゆえに $(x, y) = (2, 8)$，$(8, 2)$．

40. 背理法により証明する．$\log_2 3$ は有理数であるとすると，$2 < 3$ なので，$\log_2 3 > 0$ であり，2 つの自然数 m，n を用いて $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ と表せる．このとき，$3 = 2^{\frac{m}{n}}$ であるが，これを n 乗して $3^n = 2^m$ が成り立つ．これは左辺は奇数，右辺は偶数となり，不合理．ゆえに $\log_2 3$ は無理数である．

41. $X = 2^x$ とおくと，X は正であり，方程式は $4X^2 - 16X + a = 0$ と表される．この方程式が X について異なる 2 つの正の解を持つ条件を求めればよいので，$0 < a < 16$．

42. 左辺 $-$ 右辺 $= (\log_2 x)(\log_2 y) - \dfrac{1}{4}(\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 y - \log_2 x) = \dfrac{1}{4}(\log_2 x + \log_2 y)^2 = \dfrac{1}{4}(\log_2 xy)^2 \geq 0$．ゆえに，左辺 $\geq$ 右辺． 等号は $\log_2 xy = 0$ すなわち，$xy = 1$ のとき成立する．

43. (1) $\log_{10} 5^{25} = 25 \log_{10} 5 = 25 \log_{10} \dfrac{10}{2} = 25(1 - \log_{10} 2) = 17.475....$ ゆえに 18 桁である．

(2) $\log_{10} 5^{25}$ の小数部分について，$\log_{10} 2 < 0.475.... < \log_{10} 3$．したがって最高位の数字は 2 である．