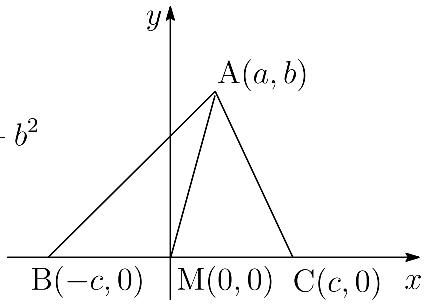
6 章 C 発展問題詳解

$\boxed{61}$ $\mathrm{AB} = |2t^2 - (3t-2)| = |2t^2 - 3t + 2|$ であるので，$\mathrm{AB} > 0$ であることを示せばよい．ここで，$f(t) = 2t^2 - 3t + 2$ とおき，t の値に関わらず $f(t) > 0$ であることを示す．

$$\begin{aligned} f(t) = 2t^2 - 3t + 2 &= 2\left(t^2 - \frac{3}{2}t\right) + 2 \\ &= 2\left\{\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right\} + 2 = 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \end{aligned}$$

以上より，任意の実数 t について，A と B は異なる． QED

$\boxed{62}$ $\mathrm{A}(a,b)$，$\mathrm{B}(-c,0)$，$\mathrm{C}(c,0)$ とおき，BC の中点 M が原点 O となるようにできる．このとき，2 点間の距離の公式より



$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 &= (a+c)^2 + b^2 + (a-c)^2 + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2\{(a^2 + b^2) + c^2\} \\ &= 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2) \end{aligned}$$

$\therefore \quad \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$ QED

$\boxed{63}$ 求める点を $\mathrm{B}(x,y)$ とおく．$\mathrm{OB}^2 = \mathrm{OA}^2$, $\mathrm{OB}^2 = \mathrm{AB}^2$ より

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 2 && \cdots\cdots \quad (1) \\ &x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 && \cdots\cdots \quad (2) \end{aligned}$$

ここで，(2) 式を整理すれば，$y = -x + 1$ となり，これを (1) に代入して整理すると次の 2 次方程式が得られる．

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

これを解くと $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ となる．B は第 2 象限にある点なので，$x<0$ より，$x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ となる．$y=-x+1$ に代入し，$y=-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ となり，$y>0$ である．求める点は　$\mathrm{B}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ であり，これは確かに第 2 象限にある．

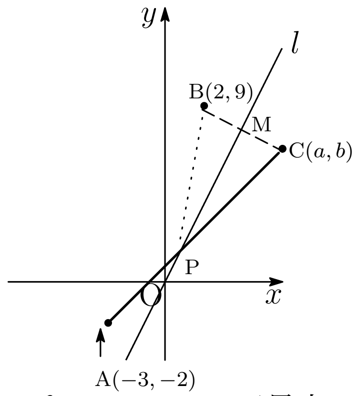
$\boxed{64}$ (1) 求める点を $\mathrm{C}\,(a,b)$ とおくと線分 BC の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{a+2}{2},\dfrac{b+9}{2}\right)$ は直線 $l: y=2x$ 上にあるので $\dfrac{b+9}{2}=a+2$ となり，これを整理して

$$2a-b=5 \quad \cdots\cdots(*)$$

また，線分 BC と直線 l は直交しているので $\dfrac{b-9}{a-2}\cdot 2=-1$ となり，これを整理して

$$a+2b=20 \quad \cdots\cdots(**)$$

$(*)\times 2+(**)$ より，$5a=30$ となり，$a=6$，これを $(*)$ に代入して $b=7$．ゆえに，$\mathrm{C}\,(6,7)$



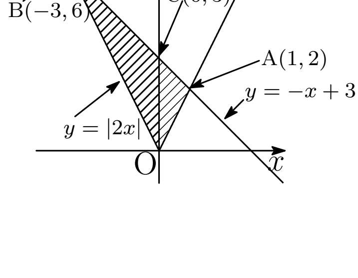
(2) M を線分 BC と直線 l との交点とする．このとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ が最小となる点 P の座標は，$\triangle\mathrm{PBM}\equiv\triangle\mathrm{PCM}$ であることから，線分 AC と直線 l との交点である．ここで，直線 AC の方程式は

$$y-(-2)=\frac{7-(-2)}{6-(-3)}(x-(-3))$$

より，$y=x+1$ である．線分 AC と直線 l との交点は $x+1=2x$ より，$x=1,\ y=2$．よって，求める点は $\mathrm{P}\,(1,2)$

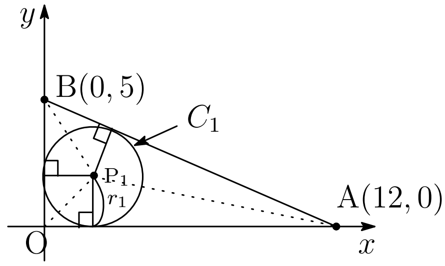
$\boxed{65}$ まず，$y=|2x|$ は $x\geqq 0$ であるとき，$y=2x$ であり，$x<0$ であるとき，$y=-2x$ である．このとき，$y=-x+3$ と $y=2x$ との交点の座標は $\mathrm{A}(1,2)$ であり，$y=-x+3$ と $y=-2x$ との交点の座標は $\mathrm{B}(-3,6)$ である．さらに，直線 $y=-x+3$ と y 軸との交点の座標は $\mathrm{C}(0,3)$ であるので求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=(\triangle\mathrm{OCA}\ \text{の面積})+(\triangle\mathrm{OCB}\ \text{の面積})\\&=3\times 1\times\frac{1}{2}+3\times 3\times\frac{1}{2}=6\end{aligned}$$



$\boxed{66}$ (1) まず，三平方の定理より $\mathrm{AB} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$ である．$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{P_1OA}$ の面積を S_1，$\triangle\mathrm{P_1AB}$ の面積を S_2，$\triangle\mathrm{P_1BO}$ の面積を S_3 と表わせば

$$\begin{aligned} S &= S_1+S_2+S_3 \\ &= \frac{r_1}{2}(12+13+5) = 15r_1 = 30 \end{aligned}$$

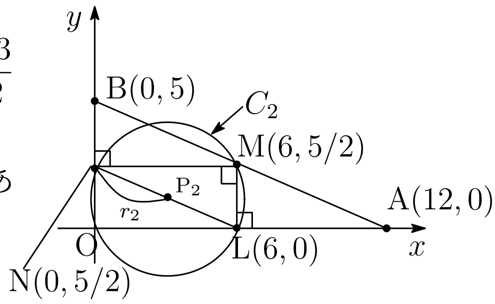


となるので，$r_1 = 2$．これより，中心 $\mathrm{P_1}$ の座標は $\mathrm{P_1}(2, 2)$

(2) まず，$\angle\mathrm{LMN} = 90^\circ$ であるので $\triangle\mathrm{LMN}$ の外接円は LN を直径とする円である．

$$\mathrm{LN} = \sqrt{(6-0)^2 + \left(0-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$$

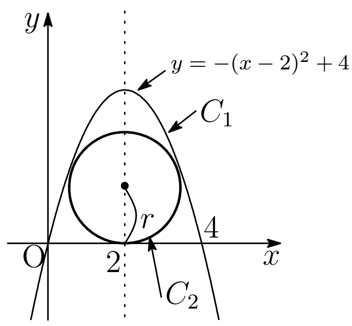
より，$r_2 = \frac{13}{4}$．また，$\mathrm{P_2}$ は LN の中点であるので $\mathrm{P_2}\left(3, \frac{5}{4}\right)$



$\boxed{67}$ 与えられた 2 次関数の標準形は

$$y = -(x-2)^2 + 4 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

であるので，グラフは直線 $x = 2$ に対して対称である．これより，求める円 C_2 の半径を r とおくと中心は $(2, r)$ とおける．よって，求める円の方程式は



$$(x-2)^2 + (y-r)^2 = r^2 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

ここで，(1) より $(x-2)^2 = -y+4$ を (2) に代入して

$$-y+4+(y-r)^2 = r^2$$

これを整理して，

$$y^2 - (2r+1)y + 4 = 0 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

が得られる．放物線 C_1 と円 C_2 が接していることから 2 次方程式 (3) の判別式を D とすると $D = 0$ である．

$$
\begin{aligned}
D &= \{-(2r+1)\}^2 - 16 \\
&= (2r+1-4)(2r+1+4) = (2r-3)(2r+5) = 0
\end{aligned}
$$

$r > 0$ であるので $r = \dfrac{3}{2}$．ゆえに，円 C_2 の方程式は

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$\boxed{68}$ $\mathrm{P}(x, y)$ とおくと，条件より $\mathrm{AP}^2 = a^2\mathrm{OP}^2$ であるので

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2+y^2)$$

となる．これを整理すると

$$(a^2-1)x^2 + (a^2-1)y^2 + 2x - 1 = 0$$

ここで，$a > 0$ より，$a = 1$ のとき，上式は $2x - 1 = 0$ となり，$x = \dfrac{1}{2}$

次に，$a \neq 1$ であるとき，$x^2 + y^2 + \dfrac{2}{a^2-1}x - \dfrac{1}{a^2-1} = 0$ より，

$$\left(x + \frac{1}{a^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{(a^2-1)^2} = \frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

以上より，$\left(x + \dfrac{1}{a^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a}{|a^2-1|}\right)^2$ となる．ゆえに

$$
\begin{cases}
a = 1 \text{ のとき，直線 } x = \dfrac{1}{2} \\
a \neq 1 \text{ のとき，中心 } \left(-\dfrac{1}{a^2-1}, 0\right) \text{ 半径 } \dfrac{a}{|a^2-1|} \text{ の円}
\end{cases}
$$

$\boxed{69}$ (i) 接線が y 軸と平行でないとき，求める接線の傾きを m とすると点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ を通ることから接線の方程式は

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

とかける．これを $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に代入して両辺に a^2b^2 を乗じると

$$b^2x^2 + a^2\{m(x-x_1) + y_1\}^2 = a^2b^2$$

上式を展開して整理すると

$$
\begin{aligned}
& b^2x^2 + a^2(m^2(x-x_1)^2 + 2my_1(x-x_1) + y_1^2) - a^2b^2 = 0 \\
\iff\ & b^2x^2 + a^2(m^2x^2 - 2m^2x_1x + m^2x_1^2 + 2my_1x - 2mx_1y_1 + y_1^2) - a^2b^2 = 0 \\
\iff\ & (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2(my_1 - m^2x_1)x + a^2(m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + y_1^2 - b^2) = 0
\end{aligned}
$$

ここで，x_1 は上記の 2 次方程式の 2 重解であるので

$$-\frac{a^2(my_1-m^2x_1)}{a^2m^2+b^2}=x_1$$

これより，$a^2(m^2x_1-my_1)=x_1(a^2m^2+b^2)$ となり $m=-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ である．ゆえに，求める接線の方程式は

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

(1) の両辺に a^2y_1 を乗じると

$$\begin{aligned} &a^2y_1y=-b^2x_1(x-x_1)+a^2y_1^2 \\ \Longleftrightarrow\ &b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^2+a^2y_1^2 \quad \cdots\cdots \quad (2)\end{aligned}$$

ここで，点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点より

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$$

これを (2) に代入すれば $b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$ となる．また，楕円であることから $a>0, b>0$ としてよいので両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

が得られる．

(ii) 接線が y 軸と平行なとき，接点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ は $\mathrm{P}(\pm a,0)$ である．これより，求める接線の方程式は $x=\pm a$ (複号同順) である．これは (3) において $x_1=\pm a$, $y_1=0$ を代入したときの式となっている．

(i), (ii) より，接点が $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ であるときの接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

となる． QED

$\boxed{70}$ (i) 接線が y 軸と平行でないとき，求める接線の傾きを m とすると点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ を通ることから接線の方程式は

$$y=m(x-x_1)+y_1$$

とかける．これを $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に代入して両辺に a^2b^2 を乗じると

$$b^2x^2-a^2\{m(x-x_1)+y_1\}^2=a^2b^2$$

上式を展開して整理すると

$$
\begin{aligned}
& b^2x^2 - a^2(m^2(x-x_1)^2 + 2my_1(x-x_1) + y_1^2) - a^2b^2 = 0 \\
\iff & b^2x^2 - a^2(m^2x^2 - 2m^2x_1x + m^2x_1^2 + 2my_1x - 2mx_1y_1 + y_1^2) - a^2b^2 = 0 \\
\iff & (-a^2m^2 + b^2)x^2 - 2a^2(my_1 - m^2x_1)x - a^2(m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + y_1^2 + b^2) = 0
\end{aligned}
$$

ここで，x_1 はこの 2 次方程式の 2 重解であるので

$$\frac{a^2(my_1 - m^2x_1)}{-a^2m^2 + b^2} = x_1$$

これより，$a^2(m^2x_1 - my_1) = x_1(a^2m^2 - b^2)$ となり $m = \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ である．ゆえに，求める接線の方程式は

$$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) + y_1 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

(1) の両辺に a^2y_1 を乗じると

$$
\begin{aligned}
& a^2y_1y = b^2x_1(x - x_1) + a^2y_1^2 \\
\iff & b^2x_1x - a^2y_1y = b^2x_1^2 - a^2y_1^2 \quad \cdots\cdots \quad (2)
\end{aligned}
$$

ここで，点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ は $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点より

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$$

これを (2) に代入すれば $b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$ となる．また，双曲線であることから $a > 0, b > 0$ としてよいので両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

が得られる．

(ii) 接線が y 軸と平行なとき，接点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ は $\mathrm{P}(\pm a, 0)$ である．これより，求める接線の方程式は $x = \pm a$ (複号同順) である．これは (3) において $x_1 = \pm a$, $y_1 = 0$ を代入したときの式となっている．

(i), (ii) より，接点が $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ であるときの接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

となる． QED

$\boxed{71}$ 最小値を与える点を $\mathrm{P}(x, y)$ とおくと $\mathrm{AP}^2 = (x-2)^2 + y^2$ となる．$\mathrm{P}(x, y)$ は楕円上の点より $y^2 = 4\left(1 - \dfrac{x^2}{16}\right)$ とかける．これを上式に代入して

$$\mathrm{AP}^2 = (x-2)^2 + 4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$$

ここで，$y^2=4\left(1-\dfrac{x^2}{16}\right)\geqq 0$ より，$x^2-16\leqq 0$ となる．よって，$-4\leqq x\leqq 4$ である．これより，AP^2 の $-4\leqq x\leqq 4$ における最小値を求めればよい．

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=(x-2)^2+4-\frac{x^2}{4}=\frac{3}{4}x^2-4x+8\\&=\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{16}{3}x\right)+8=\frac{3}{4}\left\{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2-\frac{64}{9}\right\}+8\\&=\frac{3}{4}\left(x-\frac{8}{3}\right)^2-\frac{16}{3}+8=\frac{3}{4}\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\end{aligned}$$

よって，AP^2 は $-4\leqq x\leqq 4$ において $x=\dfrac{8}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{8}{3}$ を取る．$\mathrm{AP}>0$ より，求める最小値は $\mathrm{AP}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$\boxed{72}$ $\mathrm{Q}(X,Y)$，$\mathrm{P}(x,y)$ とする．AQ の中点が P であるので，$x=\dfrac{X+6}{2}$，$y=\dfrac{Y}{2}$ とかける．よって，

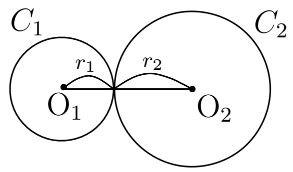
$$X=2x-6,\ Y=2y\quad\cdots\cdots\quad(1)$$

ここで，$\mathrm{Q}(X,Y)$ は放物線 $y^2=8x$ 上にあるので，$Y^2=8X$ が成り立ち，(1) を $Y^2=8X$ に代入して整理すると

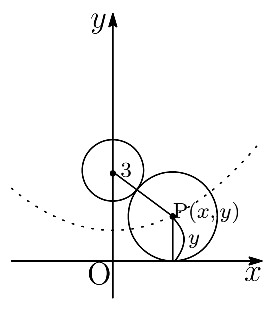
$$(2y)^2=8(2x-6)\iff 4y^2=16(x-3)\iff y^2=4(x-3)$$

ゆえに，求める軌跡は，放物線 $y^2=4x$ を x 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線である．

$\boxed{73}$ 一般に，円 C_1, C_2 が**外接する**というのは図の場合のときをいう．すなわち，C_k の中心を O_k $(k=1,2)$, 半径を r_k $(k=1,2)$ とするとき，$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2=r_1+r_2$ となるとき，2 円 C_1, C_2 は外接するという．



求める円の中心を $\mathrm{P}(x,y)$ $(y>0)$ とおく．求める円は x 軸に接するので，半径は y である．さらに右図より



$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=1+y$$

であることから $x^2+(y-3)^2=(1+y)^2$ となる．展開して整理すると

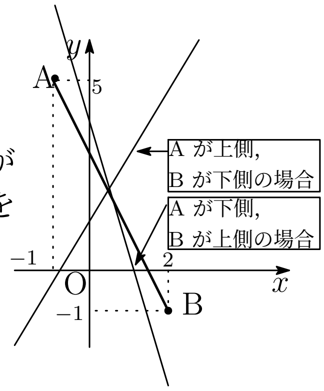
$$x^2=8(y-1)$$

となる．ゆえに，求める軌跡は放物線 $x^2=8y$ を y 軸方向に 1 だけ平行移動した曲線である．

$\boxed{74}$ $l\ :\ y=(b-a)x-(3b+a)$ が線分 AB と共有点を持つということは，次の (i), (ii) の場合のときである．

(i) 点 A が l の上側かあるいは l 上の点で，点 B が l の下側かあるいは l 上の点であるときは次の不等式を満たす．

$$\begin{cases} 5 \geqq (b-a)(-1)-(3b+a) & \cdots \quad (1) \\ -1 \leqq (b-a)\cdot 2-(3b+a) & \cdots \quad (2) \end{cases}$$



(ii) 点 A が l の下側かあるいは l 上の点で，点 B が l の上側かあるいは l 上の点であるときは次の不等式を満たす．

$$\begin{cases} 5 \leqq (b-a)(-1)-(3b+a) & \cdots \quad (3) \\ -1 \geqq (b-a)\cdot 2-(3b+a) & \cdots \quad (4) \end{cases}$$

以上より，求める点 $\mathrm{P}(a, b)$ の存在する領域は (1)，(2) から，連立不等式

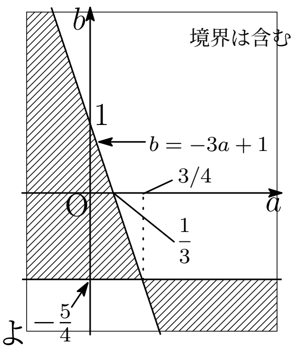
$$\begin{cases} b \geqq -\dfrac{5}{4} & \cdots (1)' \\ b \leqq -3a+1 & \cdots (2)' \end{cases}$$

の表す領域か，あるいは (3)，(4) から，連立不等式

$$\begin{cases} b \leqq -\dfrac{5}{4} & \cdots (3)' \\ b \geqq -3a+1 & \cdots (4)' \end{cases}$$

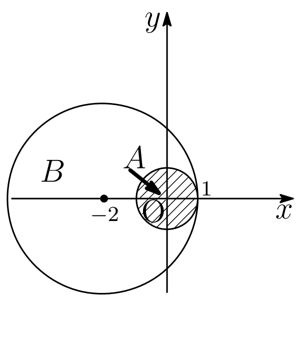
の表す領域をあわせたものである．

ゆえに，求める点 $\mathrm{P}(a, b)$ の存在する領域は右図のようになる．



$\boxed{75}$ $x^2+y^2-1<0$ は $x^2+y^2<1$ であるので，この不等式の表す領域 A は，中心が原点，半径が 1 の円の内部で境界を含まない斜線部分である．また，$x^2+4x+y^2-5<0$ は $(x+2)^2+y^2<9$ とかけるので，この不等式の表す領域 B は，中心が $(-2, 0)$，半径が 3 の円の内部で境界を含まない部分である．

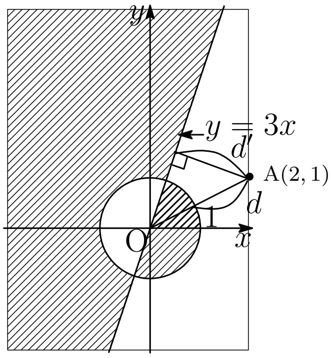
このとき，右図から分かるように，$A \subset B$ であるので，$x^2+y^2-1<0$ であれば，$x^2+4x+y^2-5<0$ である． QED



$\boxed{76}$ 不等式 $(3x-y)(x^2+y^2-1) \leqq 0$ の表す領域 D は次の (1)，(2) の連立不等式の表す領域を合わせた領域である（右図参照）．

$$\begin{cases} 3x-y \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad x^2+y^2-1 \leqq 0 \quad \cdots \quad (1) \\ 3x-y \leqq 0 \quad \text{かつ} \quad x^2+y^2-1 \geqq 0 \quad \cdots \quad (2) \end{cases}$$

このとき，点 A から直線 $y=3x$ へ下ろした垂線の長さを d'，$d = \mathrm{OA}-1$ とおくとき，最短距離は d か d' のいずれか小さい方である．



$$d' = \frac{|3\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \qquad d = \sqrt{2^2+1^2}-1 = \sqrt{5}-1$$

(d' の求め方は T1 基礎数学 第 6 章 演習問題 B $\boxed{11}$ を参照) ここで，$a,\ b>0$ のとき，$a>b \iff a^2>b^2$ であることに注意すると

$$d^2 = 6-2\sqrt{5} < 6-2\times 2.23 = 1.54 < (d')^2 = \frac{10}{4} = 2.5$$

より，d が最小値である．よって，点 A$(2,1)$ と領域との距離の最小値は $\sqrt{5}-1$

$\boxed{77}$ a について整理すると

$$a^2+2xa+2x-y-1=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

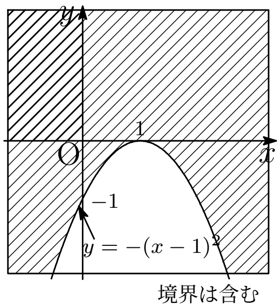
となる．ここで，直線 l が点 (x,y) を通るためには (1) の判別式 D が $D \geqq 0$ であればよい．これより，

$$D/4 = x^2-(2x-y-1) \geqq 0$$

整理して

$$y \geqq -x^2+2x-1 = -(x-1)^2$$

ゆえに，直線 l が通る領域は右図となる．



$\boxed{78}$ $xy=k$ とおく．

(i) $k=0$ のときは $xy=k=0$ より，$x=0$ あるいは $y=0$ となるので $k=0$ はとりうる値である．

(ii) $k \neq 0$ とする．このとき，$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ より，

$$y = \frac{k}{x} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$
$$x^2+y^2=2 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

が共有点を持つ条件を調べてみる．

(1) を (2) に代入して $x^2+\left(\dfrac{k}{x}\right)^2=2$ より，

$$x^4-2x^2+k^2=0 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

ここで，$t=x^2$ とおくと (3) は

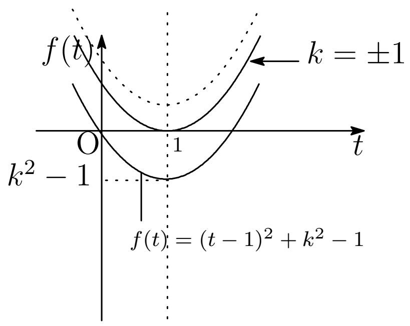
$$t^2-2t+k^2=0 \quad (t>0) \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

とかける．このとき，(1) と (2) が共有点を持つためには (4) が正の実数解を持つことと同値である．

(4) が正の実数解を持つための条件を調べるために 2 次関数 $f(t)=t^2-2t+k^2$ を考える．ここで，

$$f(t)=t^2-2t+k^2=(t-1)^2+k^2-1$$

であるので，$f(t)$ は頂点が $(1,k^2-1)$ で下に凸の 2 次関数である．これより，グラフは右図のようになるので (4) が正の実数解を持つためには $k^2-1\leqq 0$ を満たせばよい．ゆえに，$(k-1)(k+1)\leqq 0$ より，$-1\leqq k\leqq 1 \quad (k\neq 0)$ となる．



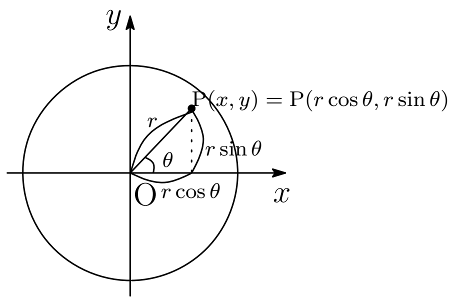
上記 (i)，(ii) をあわせて，$-1\leqq xy\leqq 1$

別解：領域上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ は原点 O から点 P までの距離 r と x 軸の正の方向と線分 OP とのなす角を θ とするとき，次のように表すことができる．

$$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \cdots\cdots \quad (0\leqq r\leqq\sqrt{2},\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

このとき，

$$\begin{aligned} xy &= r\cos\theta\cdot r\sin\theta \\ &= r^2\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{r^2}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{r^2}{2}\sin 2\theta \quad \cdots\cdots \quad (1) \end{aligned}$$



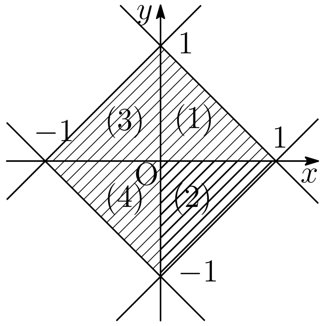
ここで，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-1\leqq\sin 2\theta\leqq 1$ である．これと (1) より，

$$-\frac{r^2}{2}\leqq xy\leqq\frac{r^2}{2}$$

さらに，$0\leqq r\leqq\sqrt{2}$ から $-1\leqq xy\leqq 1$

$\boxed{79}$ 与えられた不等式は x，y の符号により，次のように表せる．

$$\begin{aligned} x+y &\leqq 1 \quad (x \geqq 0,\ y \geqq 0) \cdots\cdots (1) \\ x-y &\leqq 1 \quad (x \geqq 0,\ y \leqq 0) \cdots\cdots (2) \\ -x+y &\leqq 1 \quad (x \leqq 0,\ y \geqq 0) \cdots\cdots (3) \\ -x-y &\leqq 1 \quad (x \leqq 0,\ y \leqq 0) \cdots\cdots (4) \end{aligned}$$



このとき，(1)〜(4) の連立不等式の表す領域を合わせた領域が，$|x|+|y| \leqq 1$ の領域である．ゆえに，右図より，求める領域の面積は $\dfrac{1}{2} \times 4 = 2$