基礎数学問題集 第 7 章 C 発展問題 (92–93 ページ) 解答

52. 点 P を通る経路は ${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_3$ 通り．点 Q を通る経路は ${}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_1$ 通り．点 P と点 Q を両方通る経路は ${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1$ 通り．よって点 P または点 Q を通る経路の総数は

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_1 - {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 510 \text{ 通り}.$$

53. 二項定理より

$$\begin{aligned} 11^{10} &= (1+10)^{10} \\ &= {}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1 \times 10^1 + {}_{10}\mathrm{C}_2 \times 10^2 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10} \times 10^{10} \\ &= 1 + 10 \times 10 + 10^2({}_{10}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10} \times 10^8) \\ &= 1 + 100(1 + {}_{10}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10} \times 10^8). \end{aligned}$$

よって 11^{10} を 100 で割った余りは 1.

54. となりあう二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$, ${}_n\mathrm{C}_{r-1}$ の差を考えると

$${}_n\mathrm{C}_r - {}_n\mathrm{C}_{r-1} = \frac{n!}{(n-r)!r!} - \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} = \frac{n!(n+1-2r)}{(n-r+1)!r!} = \begin{cases} > 0 & \left(r < \frac{n+1}{2}\right) \\ = 0 & \left(r = \frac{n+1}{2}\right) \\ < 0 & \left(r > \frac{n+1}{2}\right) \end{cases}$$

となる．ここで

- n が偶数のとき, $\dfrac{n+1}{2}$ は整数ではない． よって $r < \dfrac{n+1}{2}$ のとき ${}_n\mathrm{C}_{r-1} < {}_n\mathrm{C}_r$, $r > \dfrac{n+1}{2}$ のとき ${}_n\mathrm{C}_{r-1} > {}_n\mathrm{C}_r$. これより

$${}_n\mathrm{C}_0 < {}_n\mathrm{C}_1 < \cdots < {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}} > {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}+1} > \cdots > {}_n\mathrm{C}_n$$

  だから, 最大となる r は $r = \dfrac{n}{2}$.
- n が奇数のとき, $r = \dfrac{n+1}{2}$ は整数で ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{r-1}$ より ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+1}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$. 偶数の場合と同様に

$${}_n\mathrm{C}_0 < {}_n\mathrm{C}_1 < \cdots < {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+1}{2}} > \cdots > {}_n\mathrm{C}_n.$$

  これより最大となる r は $r = \dfrac{n-1}{2}$ および $r = \dfrac{n+1}{2}$.

55. ${}_p\mathrm{C}_r = x$ とおく．このとき x は自然数で

$$x = {}_p\mathrm{C}_r = \frac{p!}{(p-r)!r!} = \frac{p(p-1)\cdots(p-r+1)}{r!} \quad \text{より} \quad x \cdot r! = p(p-1)\cdots(p-r+1).$$

ここで右辺は素数 p で割り切れるから, 左辺 $x \cdot r!$ も p で割り切れる．問題の条件より $1 \leqq r \leqq p-1$ だから p は $r!$ を割り切らない．よって p は x を割り切るから $x = {}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数である．

56. (1) 立方体の上面をある色で塗ると, 下面の色の選び方は上面の色以外の 5 通り. この上下を貫く軸で回転させて一致する側面の塗り方は同じなので, 4 つの側面の塗り方は 4 色の円順列の総数に等しい. よって色の塗り方は下面の色の選び方 5 通りのそれぞれに対して $\dfrac{4!}{4} = 6$ 通り. 積の法則から

$$5 \times 6 = 30 \text{ 通り}.$$

(2) 色が隣り合わない条件から上と下の面が同じ色になるから, 上下面の色の選び方は 5 通り. そのそれぞれに対して, 側面の塗り方は, $\dfrac{4!}{4} = 6$ 通り. ここで上下の色が同じであることから, 立方体の上下を反転させると同じ塗り方のものが 2 つずつある. よって

$$5 \times \frac{4!}{4} \times \frac{1}{2} = 15 \text{ 通り}.$$

57. (1) $0, 1$ から重複を許して n 個取って並べる重複順列の総数より $f(n) = 2^n$.

(2) 具体的に列挙して数え上げる. 条件より $n = 3$ のとき 010, 011, 101, 110, 111 の 5 通り. $n = 4$ のとき 0101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1101, 1110, 1111 の 8 通り. よって $g(3) = 5,\ g(4) = 8$.

(3) 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列のうち, $\underbrace{* \cdots * 0}_{n-2\text{ 個}}$ のように最後が 0 であるものの個数を a, $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}$ のように最後が 1 であるものの個数を b とすると, $g(n-2) = a+b$ である.

ここで条件を満たす $n-1$ 個の 0, 1 の列は,

- 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列 $\underbrace{* \cdots * 0}_{n-2\text{ 個}}$ の末尾に 1 を加えたもの $\underbrace{* \cdots * 0}_{n-2\text{ 個}}1$
- 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列 $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}$ の末尾に 0 を加えたもの $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}0$
- 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列 $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}$ の末尾に 1 を加えたもの $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}1$

のいずれかだから $g(n-1) = a + b + b = a + 2b$ である.

さらに条件を満たす n 個の 0, 1 の列は,

- 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列 $\underbrace{* \cdots * 0}_{n-2\text{ 個}}$ の末尾に 10 を加えたもの $\underbrace{* \cdots * 0}_{n-2\text{ 個}}10$
- 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列 $\underbrace{* \cdots * 0}_{n-2\text{ 個}}$ の末尾に 11 を加えたもの $\underbrace{* \cdots * 0}_{n-2\text{ 個}}11$
- 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列 $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}$ の末尾に 01 を加えたもの $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}01$
- 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列 $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}$ の末尾に 10 を加えたもの $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}10$
- 条件を満たす $n-2$ 個の 0, 1 の列 $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}$ の末尾に 11 を加えたもの $\underbrace{* \cdots * 1}_{n-2\text{ 個}}11$

のいずれかだから $g(n) = a + a + b + b + b = 2a + 3b$ である.

以上より $g(n) = 2a + 3b = (a + 2b) + (a + b) = g(n-1) + g(n-2)$ を得る.

58. (1) 4 名を 1 名以上いるグループ 2 つに分ける分け方は 3 名と 1 名に分けるか 2 名と 2 名に分けるかの二通りである. このとき

イ) 4 名を 3 名と 1 名に分けるのは ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$ 通り. そのそれぞれに対して, 3 名の円順列は $\dfrac{3!}{3} = 2$ 通り, 1 名の円順列は $\dfrac{1!}{1} = 1$ 通り

ロ) 4 名を 2 名と 2 名に分けるのは ${}_4\mathrm{C}_2 \times \dfrac{1}{2!} = 3$ 通り. そのそれぞれに対して, 2 名の円順列は $\dfrac{2!}{2} = 1$ 通り

である. よって積の法則と和の法則より $4 \times 2 \times 1 + 3 \times 1 \times 1 = 11$ 通りだから

$$S(4, 2) = 11.$$

(2) n 名の学生のうち, 特定の 1 名を固定して考える (以下 A で表す). n 名を k グループに分けるとき

イ) A を除く $n-1$ 名で $k-1$ グループを作っている場合
A だけからなるグループを作ると k グループできる. この場合, 作れる円順列の総数は $S(n-1, k-1) \times 1 = S(n-1, k-1)$

ロ) A を除く $n-1$ 名で k グループを作っている場合
各グループの学生の数を $r_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ とすると, $n - 1 = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$.
すでにある円順列に A を追加することで n 名に関する円順列を作ることになる. このとき r_i 名からなる円順列について, 人と人の間に別の人を追加することで $r_i + 1$ 名の円順列が得られる. よって r_i 通りの作り方がある. それぞれの円順列について, この性質が成り立つので, A を追加する方法は $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n - 1$ 通り.
よって作れる円順列の総数は $(n-1)S(n-1, k)$

である. これらは同時に起こらないから, 和の法則より

$$S(n, k) = (n-1)S(n-1, k) + S(n-1, k-1).$$

(3) 定義より $S(n,1)=\dfrac{n!}{n}=(n-1)!,\ \ S(2,2)=1$ である.

$$
\begin{aligned}
&S(n+1,2)\\
&=nS(n,2)+S(n,1)\\
&=n\{(n-1)S(n-1,2)+S(n-1,1)\}+(n-1)!\\
&=n(n-1)S(n-1,2)+n\cdot(n-2)!+(n-1)!\\
&=n(n-1)S(n-1,2)+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n}\\
&=n(n-1)\{(n-2)S(n-2,2)+S(n-2,1)\}+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n}\\
&=n(n-1)(n-2)S(n-2,2)+n(n-1)\cdot(n-3)!+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n}\\
&=n(n-1)(n-2)S(n-2,2)+\frac{n!}{n-2}+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n}\\
&=\cdots\\
&=n(n-1)\cdots3(2S(2,2)+S(2,1))+\frac{n!}{3}+\cdots+\frac{n!}{n-2}+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n}\\
&=n(n-1)\cdots3(2\cdot1+1)+\frac{n!}{3}+\cdots+\frac{n!}{n-2}+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n}\\
&=n!+\frac{n!}{2}+\frac{n!}{3}+\cdots+\frac{n!}{n-2}+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n}
\end{aligned}
$$

よって, $H_n=\dfrac{S(n+2,2)}{n!}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ である.

(4) $k=\lfloor\log_2 n\rfloor$ とする. このとき $2^k\leqq n<2^{k+1}$ だから

$$\frac{1}{2^{k+1}}<\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{2^k}$$

が成り立つことに注意する.

最初に右の不等式を示す.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqq1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

であることと,

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\\
\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\leqq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1\\
\cdots\\
\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\leqq\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1
\end{gathered}
$$

であることより

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} &\leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\\ &=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\\ &\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)\\ &\leqq \underbrace{1+1+\cdots+1}_{k+1\text{ 個}}=k+1\end{aligned}$$

が成り立つ.

次に左の不等式を示す.

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{n}\geqq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}$$

であることと,

$$\begin{gathered}1>\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geqq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geqq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\\ \cdots\\ \frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\geqq\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\end{gathered}$$

であることより

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} &\geqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\\ &=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\ &\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\ &>\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k+1\text{ 個}}=\frac{k+1}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ.

59. $x_i \geqq 0$ なので, $k=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ の取りうる値は $k=0,1,2,3,4,5,6$ である. それぞれの k に対して ${}_{k+5}\mathrm{C}_5$ 個の組が条件 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6<7$ を満たすから, 求める個数は

$${}_5\mathrm{C}_5+{}_6\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_5+{}_9\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{11}\mathrm{C}_5=924\text{ 個}.$$

60. (1) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ を, 二項定理を用いて展開するとき, a_n は ${}_n\mathrm{C}_r \left(\dfrac{1}{n}\right)^r = {}_n\mathrm{C}_r \dfrac{1}{n^r}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots n)$ という項の和となる. ここで各項は

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_r \frac{1}{n^r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{1}{n^r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\frac{1}{n^r} \\
&= \frac{1}{r!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r} \\
&= \frac{1}{r!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n\cdot n\cdots n} \\
&= \frac{1}{r!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-r+1}{n} \\
&= \frac{1}{r!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

となる. これより求める等式を得る.

(2) 自然数 n に対して, n 番目の不等式 $a_n < a_{n+1}$ を示せばよい. $n+1 > n$ より $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ だから $-\dfrac{1}{n+1} > -\dfrac{1}{n}$ となる. これより

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} =& 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \\
&+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\
\\
>& 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\
&+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\
\\
>& 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\
&+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = a_n.
\end{aligned}
$$

(3) $n \geqq 2$ に対し $1-\dfrac{r}{n} < 1$ $(r = 2, \ldots n-1)$ であること, および

$$
r! = r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \geqq \underbrace{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2}_{r-1\text{ 個}} = 2^{r-1} \quad \text{より} \quad \frac{1}{r!} \leqq \frac{1}{2^{r-1}}
$$

であることより

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

である. また $a_1 = 2$ より, 全ての自然数 n に対して $a_n \leqq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ となる.

(4) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ とおく. ここで

$$
\begin{aligned}
S_n - \frac{1}{2}S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n} < 1
\end{aligned}
$$

であるから, $\frac{1}{2}S_n < 1$ より $S_n < 2$. よって両辺に 1 を加えて結論を得る.

(注意) 後に学ぶ自然対数の底 $e = 2.71828182845904\cdots$ はこの数列 $\{a_n\}$ の極限値である.