第１章の問題，解答例

1.1　$P(A|\Omega_i)P(\Omega_i) = P(A \cap \Omega_i)$ である．さらに，$\Omega = \cup_j \Omega_j$ より

$$\sum_{j=1}^{N} P(A|\Omega_j)P(\Omega_j) = \sum_{j=1}^{N} P(A \cap \Omega_j) = P(A)$$

となるから，問題の右辺が $P(A \cap \Omega_i)/P(A)$ に等しいことが分かる．

1.2　(i), (ii) ともに Fubini の定理を用いる．(i) は

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqq n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = E[X]$$

と和の順序を変えることで証明される．(ii) は集合 A の定義関数を $\mathbf{1}_A$ として，次のように証明できる．

$$\int_0^{\infty} P(X \geqq x)\, dx = \int_0^{\infty} E[\mathbf{1}_{\{X \geqq x\}}]\, dx = E[\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{X \geqq x\}}\, dx] = E[\int_0^{X} dx] = E[X].$$

1.3　まず，$X + Y$ が平均 $\xi + \eta$ の Poisson 分布に従うことが次のようにして分かる：

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{r=0}^{n} P(X = r, Y = n - r) = \sum_{r=0}^{n} e^{-\xi}\frac{\xi^r}{r!} e^{-\eta}\frac{\eta^{n-r}}{(n-r)!} \\ &= e^{-(\xi+\eta)}\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\xi^r\eta^{n-r} = e^{-(\xi+\eta)}\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}. \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} P(X = r|X + Y = n) &= \frac{P(X = r, Y = n - r)}{P(X + Y = n)} = e^{-\xi}\frac{\xi^r}{r!}e^{-\eta}\frac{\eta^{n-r}}{(n-r)!} \times e^{\xi+\eta}\frac{n!}{(\xi+\eta)^n} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!}\left(\frac{\xi}{\xi+\eta}\right)^r\left(\frac{\eta}{\xi+\eta}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

1.4　定義に従って，次のように $P(S_X = r)$ を計算する：

$$\begin{aligned} P(S_X = r) &= \sum_{n=r}^{\infty} P(S_n = r, X = n) = \sum_{n=r}^{\infty}\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r}\cdot e^{-\xi}\frac{\xi^n}{n!} \\ &= e^{-\xi}\frac{p^r}{r!}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-r}}{(n-r)!}\xi^{n-r}\times\xi^r = e^{-\xi}\frac{(p\xi)^r}{r!}e^{(1-p)\xi} = e^{-p\xi}\frac{(p\xi)^r}{r!}. \end{aligned}$$

1.5　$X_1 + X_2$ が二項分布 $B(n_1 + n_2, p)$ に従うことから，$n - n_2 \leqq r \leqq n_1$ のとき

$$\begin{aligned} P(X_1 = r|X_1 + X_2 = n) &= \frac{P(X_1 = r, X_2 = n - r)}{P(X_1 + X_2 = n)} = \frac{\binom{n_1}{r}p^r(1-p)^{n_1-r}\binom{n_2}{n-r}p^{n-r}(1-p)^{n_2-(n-r)}}{\binom{n_1+n_2}{n}p^n(1-p)^{n_1+n_2-n}} \\ &= \frac{\binom{n_1}{r}\binom{n_2}{n-r}}{\binom{n_1+n_2}{n}}. \end{aligned}$$

1.6　分布関数 $P(X_{\min} \leqq x), P(X_{\max} \leqq x)$ を求めると，x に関する導関数が確率密度関数である．
(i) X_i が平均 1 の指数分布に従うとき，$x > 0$ に対して

$$P(X_{\min} \geqq x) = P(X_i \geqq x, i = 1, 2, ..., n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geqq x) = (e^{-x})^n = e^{-nx}.$$

従って，

$$\frac{d}{dx}P(X_{\min} \leqq x) = \frac{d}{dx}(1 - P(X_{\min} \geqq x)) = ne^{-nx}$$

であるから，$X_{\min}$ の確率分布の密度関数は $ne^{-nx}, x > 0,$ であり，$X_{\min}$ は平均 $1/n$ の指数分布に従う．$X_{\max}$ に対しては,

$$P(X_{\max} \leqq x) = P(X_i \leqq x, i = 1, 2, ..., n) = (1 - e^{-x})^n$$

より，$X_{\max}$ の確率密度関数が $ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}, x > 0,$ であることが分かる．
(ii) X_i が $[0, 1]$ 上の一様分布に従うときは，$0 \leqq x \leqq 1$ に対して

$$P(X_{\min} \geqq x) = P(X_i \geqq x, i = 1, 2, ..., n) = (1 - x)^n$$

より，$X_{\min}$ の確率密度関数は $n(1 - x)^{n-1}, 0 \leqq x \leqq 1,$ である．$X_{\max}$ に対しては,

$$P(X_{\max} \leqq x) = P(X_i \leqq x, i = 1, 2, ..., n) = x^n$$

より，$X_{\max}$ の確率密度関数は $nx^{n-1}, 0 \leqq x \leqq 1,$ である．

1.7　(i) $\{Y_n \geqq M\} = \cup_{i=1}^n \{|X_i| \geqq M\}$ より，

$$\begin{aligned} E[Y_n \mathbf{1}_{\{Y_n \geqq M\}}] &\leqq \sum_{i=1}^n E[Y_n \mathbf{1}_{\{Y_n \geqq M\}} \mathbf{1}_{\{Y_n = |X_i|\}}] = \sum_{i=1}^n E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| \geqq M\}} \mathbf{1}_{\{Y_n = |X_i|\}}] \\ &\leqq \sum_{i=1}^n E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| \geqq M\}}] = nE[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| \geqq M\}}]. \end{aligned}$$

(ii) $\varepsilon > 0$ に対して $M = n\varepsilon$ として (i) を用いると，

$$E\left[\frac{1}{n} Y_n \mathbf{1}_{\{n^{-1} Y_n \geqq \varepsilon\}}\right] \leqq E[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| \geqq n\varepsilon\}}]$$

が得られる．これから

$$E\left[\frac{1}{n} Y_n\right] = E\left[\frac{1}{n} Y_n \mathbf{1}_{\{n^{-1} Y_n \geqq \varepsilon\}}\right] + E\left[\frac{1}{n} Y_n \mathbf{1}_{\{n^{-1} Y_n < \varepsilon\}}\right] \leqq E[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| \geqq n\varepsilon\}}] + \varepsilon$$

となり，$\limsup_{n \to \infty} E[n^{-1} Y_n] \leqq \varepsilon$ を得て，$\varepsilon > 0$ が任意であることから結論を得る．

1.8　f を $\mathbf{R}$ 上の正値可測関数とすると，

$$\begin{aligned} &E\left[f\left(\frac{Y}{X}\right)\right] = \iint_{\mathbf{R}^2} f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-x^2/2\sigma_1^2} e^{-y^2/2\sigma_2^2}\, dx\, dy \\ &= 2\int_0^\infty \int_0^\infty f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-x^2/2\sigma_1^2} e^{-y^2/2\sigma_2^2}\, dx\, dy + 2\int_{-\infty}^0 \int_0^\infty f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-x^2/2\sigma_1^2} e^{-y^2/2\sigma_2^2}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

$\xi = y/x, \eta = y,$ と変数変換をすると，$dxdy = \eta\xi^{-2} d\xi d\eta$ より

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-x^2/2\sigma_1^2} e^{-y^2/2\sigma_2^2}\, dx\, dy &= \int_0^\infty f(\xi) \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2\xi^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2\xi^2}\eta^2\right) \eta\, d\eta \\ &= \int_0^\infty f(\xi) \frac{\sigma_2/\sigma_1}{2\pi} \frac{1}{(\sigma_2/\sigma_1)^2 + \xi^2}\, d\xi. \end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-x^2/2\sigma_1^2} e^{-y^2/2\sigma_2^2}\, dx\, dy &= \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(-\frac{y}{x}\right) \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-x^2/2\sigma_1^2} e^{-y^2/2\sigma_2^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty f(-\xi) \frac{\sigma_2/\sigma_1}{2\pi} \frac{1}{(\sigma_2/\sigma_1)^2 + \xi^2}\, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 f(\xi) \frac{\sigma_2/\sigma_1}{2\pi} \frac{1}{(\sigma_2/\sigma_1)^2 + \xi^2}\, d\xi. \end{aligned}$$

従って，すべての正値可測関数 f に対して

$$E\left[f\left(\frac{Y}{X}\right)\right] = \int_{\mathbf{R}} f(\xi) \frac{\sigma_2/\sigma_1}{\pi} \frac{1}{(\sigma_2/\sigma_1)^2 + \xi^2}\, d\xi$$

が成り立つことが分かり，

$$P\left(\frac{Y}{X} \in d\xi\right) = \frac{\sigma_2/\sigma_1}{\pi} \frac{1}{(\sigma_2/\sigma_1)^2 + \xi^2}\, d\xi$$

を得る．

1.9 (i) f を $[0, \infty)$ 上の正値可測関数とすると，

$$\begin{aligned} E[f(X^2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 2\int_0^{\infty} f(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= 2\int_0^{\infty} f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int_0^{\infty} f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-1/2} e^{-z/2}\, dz. \end{aligned}$$

よって，

$$P(X^2 \in dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-1/2} e^{-z/2}\, dz.$$

または，$z > 0$ に対して

$$P(X^2 \leqq z) = P(-\sqrt{z} \leqq X \leqq \sqrt{z}) = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dz = 2\int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dz$$

が成り立つから，両辺を微分して，

$$\frac{d}{dz} P(X^2 \leqq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-1/2} e^{-z/2}.$$

(ii) は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} E[\exp(-\lambda^2 \mathbf{e}^2/N^2)] &= \int_0^{\infty} E[\exp(-\lambda^2 u^2/N^2) | \mathbf{e} = u]\, P(\mathbf{e} \in du) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u}\, du \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda^2 u^2}{x^2}\right)\right]\, dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-\sqrt{2}\lambda u}\, du = (1 + \sqrt{2}\lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

ただし，計算の途中で公式

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-c\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{x^2}\right)\right)\, dx = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-2bc/a}, \qquad a, b, c > 0,$$

を用いた．

1.10 変形 Bessel 関数 K_ν の積分表現より，

$$K_\nu(ab) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + b^2 x\right)\right) x^{\nu-1}\, dx, \qquad a, b > 0,$$

が成り立つ．また，$K_{-\nu} = K_\nu$．これらを用いて，$I_{\lambda,\mu}^{(-\nu)} + 2\mu^{-2}\gamma_\nu$ および $I_{\lambda,\mu}^{(\nu)}$ の確率分布の Laplace 変換を計算し，一致を示す．

$$\begin{aligned} &E[\exp(-\frac{1}{2}\xi^2 I_{\lambda,\mu}^{(\nu)})] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 x/2} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu} \frac{1}{2K_\nu(\lambda\mu)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{x} + \mu^2 x\right)\right) x^{\nu-1}\, dx \\ &= \left(\frac{\mu}{\sqrt{\xi^2 + \mu^2}}\right)^{\nu} \frac{K_\nu(\lambda\sqrt{\xi^2 + \mu^2})}{K_\nu(\lambda\mu)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E[\exp(-\frac{1}{2}\xi^2 (I_{\lambda,\mu}^{(-\nu)} + 2\mu^{-2}\gamma_\nu))] = E[\exp(-\frac{1}{2}\xi^2 I_{\lambda,\mu}^{(-\nu)})]\, E[\exp(-\xi^2 \mu^{-2}\gamma_\nu)] \\ &= \left(\frac{\mu}{\sqrt{\xi^2 + \mu^2}}\right)^{-\nu} \frac{K_{-\nu}(\lambda\sqrt{\xi^2 + \mu^2})}{K_{-\nu}(\lambda\mu)} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 x/\mu^2} \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-x} x^{\nu-1}\, dx \\ &= \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \mu^2}}{\mu}\right)^{\nu} \frac{K_\nu(\lambda\sqrt{\xi^2 + \mu^2})}{K_\nu(\lambda\mu)} \left(\frac{\mu^2}{\xi^2 + \mu^2}\right)^{\nu} = \left(\frac{\mu}{\sqrt{\xi^2 + \mu^2}}\right)^{\nu} \frac{K_\nu(\lambda\sqrt{\xi^2 + \mu^2})}{K_\nu(\lambda\mu)} \end{aligned}$$

1.11　数学的帰納法により，$T > 0$ に対して

$$P(N_T = n) = e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{*}$$

が成り立つことを示す．

　まず，$n = 0$ のときは，

$$P(N_T = 0) = P(X_1 > T) = \int_T^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, dt = e^{-\lambda T}$$

より (*) が成り立つ．

　n のとき (*) が成り立つと仮定する．

$$P(N_T = n+1) = \int_0^T P(N_{T-t} = n)\, P(X_1 \in dt) = \int_0^T P(N_{T-t} = n)\lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

に注意すると，帰納法の仮定より

$$P(N_T = n+1) = \int_0^T e^{-\lambda(T-t)}\frac{(\lambda(T-t))^n}{n!}\lambda e^{-\lambda t}\, dt = e^{-\lambda T}\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^T (T-t)^n\, dt = e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^{n+1}}{(n+1)!}$$

となり，$n+1$ のときにも (*) が成り立つことが分かる．

1.12　(i) $U'\Sigma U = \Lambda$ が対角行列となるような直交行列 U ととる．ただし，U' は U の転置行列であり $U' = U^{-1}$ である．Λ の対角成分を $\lambda_1, ..., \lambda_n$ とすると，$x - m = Uy$ と変数変換すれば，$dx_1 \cdots dx_n = dy_1 \cdots dy_n$ であり，

$$\begin{aligned}\langle x-m, \Sigma^{-1}(x-m)\rangle &= \langle x-m, (U\Lambda U')^{-1}(x-m)\rangle = \langle x-m, U\Lambda^{-1}U'(x-m)\rangle \\ &= \langle U'(x-m), \Lambda^{-1}U'(x-m)\rangle = \langle y, \Lambda^{-1}y\rangle\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}&E[X_i] = E[X_i - m_i] + m_i \\ &= \int_{\mathbf{R}^n}(x_i - m_i)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\langle x-m,\Sigma^{-1}(x-m)\rangle/2}\, dx_1\cdots dx_n + m_i \\ &= \int_{\mathbf{R}^n}(Uy)_i\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}y_k^2/2}\, dy_1\cdots dy_n + m_i \\ &= \sum_{j=1}^n U_{ij}\int_{\mathbf{R}^n} y_j\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}y_k^2/2}\, dy_1\cdots dy_n + m_i\end{aligned}$$

となる．ただし，$(Uy)_j$ は $Uy \in \mathbf{R}^n$ の第 j 成分である．最後の式の第 1 項の各々の積分は 0 であることは容易に分かるから，$E[X_i] = m_i$ が得られる．

(ii) (i) と同様に，$x - m = Uy$ と変数変換をして積分の計算を実行すると，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)] \\ &= \int_{\mathbf{R}^n}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\langle x-m,\Sigma^{-1}(x-m)\rangle/2}\, dx_1\cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbf{R}^n}(Uy)_i(Uy)_j\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}y_k^2/2}\, dy_1\cdots dy_n \\ &= \sum_{\ell=1}^n\sum_{m=1}^n U_{i\ell}U_{jm}\int_{\mathbf{R}^n} y_\ell y_m\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}y_k^2/2}\, dy_1\cdots dy_n.\end{aligned}$$

が得られる．さらに，$\det\Sigma = \lambda_1\cdots\lambda_n$ より，

$$\int_{\mathbf{R}^n} y_\ell y_m\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}y_k^2/2}\, dy_1\cdots dy_n = \delta_{\ell m}\lambda_\ell$$

に注意すれば，$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{\ell=1}^n U_{i\ell}U_{j\ell}\lambda_\ell$ を得る．

　$\Sigma = U\Lambda U'$ を成分で書くと，$\Sigma_{ij} = \sum_{\ell=1}^n U_{i\ell}\lambda_\ell U_{j\ell}$ となるから，$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \Sigma_{ij}$ を得る．

注意．$E[\exp(\langle \mathbf{a}, X\rangle)]$ を求めて，$\mathbf{a}$ の各偏導関数の $\mathbf{a} = 0$ での値を求めることにより，X_i の平均や共分散を求めることもできる．

(ii) X の確率密度関数が $X_i, i=1,...,n,$ の確率密度関数の積となるのは，Σ が対角行列で $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=0,$ $i \neq j,$ のときに限ることに注意すればよい．

1.13 $a_1X_1+\cdots+a_nX_n = \langle \mathbf{a}, X\rangle$ の積率母関数を計算する．任意の $\xi \in \mathbf{R}$ に対し，

$$E[e^{\xi\langle \mathbf{a},X\rangle}] = \int\cdots\int e^{\xi\langle \mathbf{a},x\rangle}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\langle x-m,\Sigma^{-1}(x-m)\rangle/2}\,dx.$$

指数については

$$\begin{aligned}\xi\langle \mathbf{a},x\rangle-\frac{1}{2}\langle x-m,\Sigma^{-1}(x-m)\rangle &= \xi\langle \mathbf{a},x-m\rangle-\frac{1}{2}\langle x-m,\Sigma^{-1}(x-m)\rangle+\xi\langle \mathbf{a},m\rangle\\ &= -\frac{1}{2}\langle x-m-\xi\Sigma\mathbf{a},\Sigma^{-1}(x-m-\xi\Sigma\mathbf{a})\rangle+\frac{1}{2}\xi^2\langle \mathbf{a},\Sigma\mathbf{a}\rangle+\xi\langle \mathbf{a},m\rangle\end{aligned}$$

と変形できる．従って，

$$\begin{aligned}E[e^{\xi\langle \mathbf{a},X\rangle}] &= \int\cdots\int\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}e^{-\langle x-m-\xi\Sigma\mathbf{a},\Sigma^{-1}(x-m-\xi\Sigma\mathbf{a})\rangle/2}\,dx\cdot e^{\xi\langle \mathbf{a},m\rangle+\xi^2\langle \mathbf{a},\Sigma\mathbf{a}\rangle/2}\\ &= e^{\xi\langle \mathbf{a},m\rangle+\xi^2\langle \mathbf{a},\Sigma\mathbf{a}\rangle/2}\end{aligned}$$

となる．これは，$\langle \mathbf{a},X\rangle$ が平均 $\langle \mathbf{a},m\rangle$ 分散 $\langle \mathbf{a},\Sigma\mathbf{a}\rangle$ の正規分布に従うことを示す．

1.14 (i) X については，その特性関数を計算する．$\xi\in\mathbf{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}E[e^{\sqrt{-1}\xi X}] &= E[e^{\sqrt{-1}n^{-1}\xi(X_1+\cdots+X_n)}]=\prod_{i=1}^n E[e^{\sqrt{-1}n^{-1}\xi X_i}]=\{E[e^{\sqrt{-1}n^{-1}\xi X_1}]\}^n\\ &= (e^{-(n^{-1}\xi)^2/2})^n = e^{-n^{-1}\xi^2/2}.\end{aligned}$$

これは，X が正規分布 $N(0,1/n)$ に従うことを示す．

Y については，Y の確率分布の Laplace 変換が χ^2 分布のそれと一致することを次のように見る．$\lambda>0$ に対して，

$$E[e^{-\lambda Y}]=\prod_{i=1}^n E[e^{-\lambda X_i^2}]=\{E[e^{-\lambda X_1^2}]\}^n$$

であり，

$$E[e^{-\lambda X_1^2}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx=(1+2\lambda)^{-1/2}$$

であるから，

$$E[e^{-\lambda Y}]=(1+2\lambda)^{-n/2}.$$

一方，χ^2 分布の Laplace 変換は，$y=(1+2\lambda)x/2$ と変数変換をして，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{(n-2)/2}e^{-x/2}\,dx=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty\left(\frac{2}{1+2\lambda}\right)^{n/2}y^{n/2-1}e^{-y}\,dy=(1+2\lambda)^{-n/2}$$

となるから，Laplace 変換の一意性から結論を得る．

(ii) $i=1$ のときに示せば後は同様である．このため，(X_1-X,X) の確率分布の Fourier 変換を計算する．$\xi,\eta\in\mathbf{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}E[e^{\sqrt{-1}(\xi(X_1-X)+\eta X)}] &= E[e^{\sqrt{-1}((1-1/n)\xi+\eta/n)X_1}e^{\sqrt{-1}\sum_{i=2}^n n^{-1}(\eta-\xi)X_i}]\\ &= E[e^{\sqrt{-1}((1-1/n)\xi+\eta/n)X_1}]\prod_{i=2}^n E[e^{\sqrt{-1}n^{-1}(\eta-\xi)X_i}]\\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\xi+\frac{\eta}{n}\right)^2-(n-1)\times\frac{(\eta-\xi)^2}{2n^2}\right]\\ &= \exp\left[-\frac{n-1}{2n}\xi^2-\frac{1}{2n}\eta^2\right].\end{aligned}$$

これは，(X_1-x,X) の確率分布が，平均 0，共分散行列 $\begin{pmatrix}(n-1)/n & 0\\ 0 & 1/n\end{pmatrix}$ の 2 次元正規分布であることを示している．このことから，X_1-X と X の独立性も分かる．(問題 1.12 参照)
(iii) $(X,X_1-X,...,X_n-X)$ の $(\mathbf{R}^{n+1}$ 上の) 確率分布の Fourier 変換を計算する．$\xi_0,\xi_1,...,\xi_n$ に対して

$$
\begin{aligned}
&E[\exp(\sqrt{-1}(\xi_0 X+\sum_{i=1}^n \xi_i(X_i-X))] \\
&=E[\exp(\sqrt{-1}(n^{-1}\xi_0+\xi_1-n^{-1}(\xi_1+\cdots+\xi_n))X_1)\times\cdots\times\exp(\sqrt{-1}(n^{-1}(\xi_0+\xi_n-n^{-1}(\xi_1+\cdots+\xi_n))] \\
&=\prod_{i=1}^n E[\exp(\sqrt{-1}(n^{-1}\xi_0+\xi_i-n^{-1}(\xi_1+\cdots+\xi_n))X_i)] \\
&=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\xi_0}{n}+\xi_i-\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}\right)^2\right] \\
&=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\xi_0^2+\sum_{i=1}^n\frac{n-1}{n}\xi_i^2\right)\right].
\end{aligned}
$$

これは，$(X,X_1-X,...,X_n-X)$ が平均 0 で共分散行列が対角成分が $1/n,(n-1)/n,...,(n-1)/n)$ の対角行列である $(n+1)$ 次元正規分布に従うことを示している．

従って，特に，X が $X_1-X,...,X_n-X$ と，そして Z と独立であることが分かる．