第２章の問題，解答例

2.1 $\{\log(p(X_i))\}$ は $\{\log(p(1)), ..., \log(p(r))\}$ に値をもつ i.i.d. で，

$$E[\log(p(X_i))] = \sum_{k=1}^{r} \log(p(k))P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{r} p(k)\log(p(k)).$$

従って，大数の強法則より結論を得る．

2.2 $E[Y_n] = m^2$ は容易に分かる．$(\sum_{i<j}^{n} a_i a_j)^2$ の展開を考えると，

$$E[(Y_n)^2] = \frac{4}{n^2(n-1)^2} E\Bigg[\sum_{i<j}^{n} (X_i)^2(X_j)^2 + 2\sum_{i<j<k}^{n} ((X_i)^2X_jX_k + X_i(X_j)^2X_k + X_iX_j(X_k)^2) + 6\sum_{i<j<k<\ell} X_iX_jX_kX_\ell\Bigg]$$

が得られる．$\sum_{i<j}$ は $\binom{n}{2}$ 個，$\sum_{i<j<k}$ は $\binom{n}{3}$ 個，$\sum_{i<j<k<\ell}$ は $\binom{n}{4}$ 個の和である．従って，

$$E[(Y_n)^2] = \frac{4}{n^2(n-1)^2}\left\{\binom{n}{2}(E[(X_1)^2])^2 + 2\cdot 3\binom{n}{3}E[(X_1)^2]m^2 + 6\binom{n}{4}m^4\right\}.$$

これから，Y_n の分散を計算すると，

$$\begin{aligned}
V[Y_n] &= E[(Y_n)^2] - (m^2)^2 \\
&= \frac{2}{n(n-1)}(E[(X_1)^2])^2 + \frac{4(n-2)}{n(n-1)}E[(X_1)^2]m^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}m^4 - m^4 \\
&\to 0, \qquad n \to \infty,
\end{aligned}$$

となり，Y_n が m^2 に L^1 収束するから結論を得る．

2.3 (i) $E[T]$ については $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ を用いると，

$$\begin{aligned}
E[Z] &= \iint_{\{(x,y)\in[0,1]^2; y \leqq f(x)\}} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{f(x)} dy = \int_0^1 f(x)\,dx, \\
E[S] &= E[f(X)] = \int_0^1 f(x)\,dx, \\
E[T] &= \int_0^1 \frac{f(x)+f(1-x)}{2}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

(ii) $m = \int_0^1 f(x)dx$ とおく．

$$V[Z] = E[Z^2] - m^2 = E[Z] - m^2 = m - m^2, \quad V[S] = E[f(X)^2] - m^2 = \int_0^1 f(x)^2\,dx - m^2,$$

は容易に分かる．ここで，$0 \leqq f \leqq 1$ だから，

$$V[S] \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - m^2 = V[Z]$$

を得る．

次に，

$$V[T] = E\left[\left(\frac{f(x)-f(1-x)}{2}\right)^2\right] - m^2 = \int_0^1 \left(\frac{f(x)+f(1-x)}{2}\right)^2 dx - m^2$$

である．$\int_0^1 f(x)^2dx = \int_0^1 f(1-x)^2dx$ を用いると，

$$\begin{aligned}
V[S] - V[T] &= \int_0^1 f(x)^2\,dx - \int_0^1 \left(\frac{f(x)+f(1-x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{3}{4}f(x)^2 - \frac{1}{2}f(x)f(1-x) - \frac{1}{4}f(1-x)^2\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}f(x)^2 - \frac{1}{2}f(x)f(1-x) + \frac{1}{4}f(1-x)^2\right] dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (f(x) - f(1-x))^2\,dx \geqq 0.
\end{aligned}$$

2.4 (i) $0 < \delta < 1$ に対して,

$$P(X_n > \frac{1+\delta}{\lambda}\log n) = \exp(-\lambda \cdot \frac{1+\delta}{\lambda}\log n) = n^{-1-\delta}.$$

従って,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \frac{1+\delta}{\lambda}\log n) < \infty$$

が成り立つから，Borel-Cantelli の補題より

$$P(n \geqq n_1 \text{ ならば } X_n \leqq \frac{1+\delta}{\lambda}\log n \text{ となる } n_1 \text{ が存在}) = 1. \tag{1}$$

よって

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leqq \frac{1+\delta}{\lambda}) = 1$$

であり，δ は任意だから

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leqq \lambda^{-1}) = 1. \tag{2}$$

一方,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geqq \frac{1}{\lambda}\log n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

$\{X_n\}$ の独立性と Borel-Cantelli の補題より

$$P(X_{n_k} \geqq \frac{1}{\lambda}\log(n_k) \text{ となる部分列 } \{n_k\}, n_k \to \infty, \text{ が存在}) = 1. \tag{3}$$

これは

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \geqq \lambda^{-1}) = 1$$

を意味するから，(2) と合わせて結論を得る．
(ii) まず，(3) より最大値 $M_n = \max_{1\leqq m\leqq n} X_m$ は無限回更新される確率が 1 である．(1) と合わせると，任意の $\delta > 0$ に対して

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} \leqq \frac{1+\delta}{\lambda}) = 1$$

であることが分かり，$\delta > 0$ は任意であることから

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} \leqq \lambda^{-1}) = 1 \tag{4}$$

を得る．

次に,

$$P(M_n < \frac{1-\delta}{\lambda}\log n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < \frac{1-\delta}{\lambda}\log n) = \left(1 - \frac{1}{n^{1-\delta}}\right)^n$$

であり，さらに

$$\left(1 - \frac{1}{n^{1-\delta}}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{n^{1-\delta}}\right)^{n^{1-\delta}}\right]^{n^\delta} \sim \exp(-n^\delta)$$

に注意すると，$0 < \delta < 1$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(M_n < \frac{1-\delta}{\lambda}\log n) < \infty$$

であることが分かる．従って，Borel-Cantelli の補題より

$$P(n > n_1 \text{ ならば } M_n \geqq \frac{1-\delta}{\lambda}\log n \text{ となる } n_2 \text{ が存在}) = 1,$$

よって

$$P(\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} \geqq \frac{1-\delta}{\lambda}) = 1$$

が成り立つ．$\delta > 0$ は任意に小さくとれるから

$$P(\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} \geqq \lambda^{-1}) = 1$$

であり，(4) と合わせれば結論を得る．

2.5 (i) $\overline{X_n}$ は正規分布 $N(m, \sigma^2/n)$ に従うから，

$$\begin{aligned} E[U_n] &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - 2(\overline{X_n} - m)\sum_{i=1}^n (X_i - m) + n(\overline{X_n} - m)^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1}(nV[X_1] - nV[\overline{X_n}]) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - n \cdot \frac{1}{n}\sigma^2) = \sigma^2. \end{aligned}$$

(ii) $V[U_n] \to 0, n \to \infty$, を示せばよい．このため $E[(U_n)^2]$ を計算する．

$$\begin{aligned} (n-1)^2 E[(U_n)^2] &= E\left[\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2\right\}^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^4 + 2\sum_{i<j}^n (X_i - \overline{X_n})^2 (X_j - \overline{X_n})^2\right] \\ &= nE[(X_1 - \overline{X_n})^4] + 2\sum_{i<j}^n E[(X_i - \overline{X_n})^2 (X_j - \overline{X_n})^2]. \end{aligned}$$

ここで，$X_1 - \overline{X_n}, ..., X_n - \overline{X_n}$, がそれぞれ正規分布 $N(0, (n-1)\sigma^2/n)$ に従う i.i.d. であることに注意すると (1 章の問題 1.14 参照)

$$(n-1)^2 E[(U_n)^2] = n \cdot 3\left(\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\right)^2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\right)^2 = n(n+2) \cdot \frac{(n-1)^2\sigma^4}{n^2}.$$

従って，$E[(U_n)^2] = (n+2)\sigma^4/n$ となり，

$$V[U_n] = E[(U_n)^2] - (\sigma^2)^2 = \frac{2}{n}\sigma^4 \to 0, \quad n \to \infty.$$

2.6 X_i の積率母関数は $M(\lambda) = (e^\lambda + e^{-\lambda})/2$. 従って，$a > 0$ に対して

$$I(a) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \{a\lambda - \log(e^\lambda + e^{-\lambda}) + \log 2\}.$$

$f(\lambda) = a\lambda - \log(e^\lambda + e^{-\lambda})$ とおくと，

$$f'(\lambda) = a - \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}} = a - \tanh(\lambda).$$

従って，f は $\lambda = \mathrm{Argtanh}(a) = \log\sqrt{(1+a)/(1-a)}$ で最大値をとり，

$$I(a) = f(\mathrm{Argtanh}(a)) + \log 2 = \frac{1}{2}\{(1+a)\log(1+a) + (1-a)\log(1-a)\}.$$

2.7 (i) $f(x) = x^{-1}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty e^{-u^2/2}du$ とおくと，$f'(x) < 0, x > 0$, および $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が分かり，第 2 の不等式を得る．第 1 の不等式も同様である．第 2 の主張は容易．
(ii) $\delta > 0$ に対して，(i) の第 2 の不等式より

$$\begin{aligned} P(|X_n| \geqq (1+\delta)\sqrt{2\log n}) &= 2\int_{(1+\delta)\sqrt{2\log n}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du \\ &\leqq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1+\delta)\sqrt{2\log n}} e^{-(1+\delta)^2 2\log n/2} = \frac{1}{(1+\delta)\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^{(1+\delta)^2}\sqrt{\log 2}}, \quad n \geqq 2. \end{aligned}$$

従って，$\sum_{n=1}^\infty P(|X_n| \geqq (1+\delta)\sqrt{2\log n}) < \infty$ であり，Borel-Cantelli の補題から

$$P(n \geqq n_1 \text{ なら } \frac{|X_n|}{\sqrt{\log n}} < (1+\delta)\sqrt{2} \text{ となる } n_1 \text{ が存在}) = 1$$

を得る．よって，

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{\log 2}} \leqq \sqrt{2}) = 1. \tag{*}$$

(i) の第 1 の不等式を用いると，$0 < \delta < 1$ のとき

$$P(|X_n| \geqq (1-\delta)\sqrt{2\log n}) \geqq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-\delta)\sqrt{2\log n}}{1+(1-\delta)^2 2\log n} e^{-(1-\delta)^2 \log n} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-\delta)\sqrt{2\log n}}{1+2(1-\delta)^2 \log n} \frac{1}{n^{(1-\delta)^2}}.$$

従って，$\sum_{n=1}^\infty P(|X_n| \geqq (1-\delta)\sqrt{2\log n}) = \infty$ であり，Borel-Cantelli の補題から

$$P(\frac{|X_{n_k}|}{\sqrt{\log n_k}} \geqq (1-\delta)\sqrt{2} \text{ である部分列 } \{n_k\}, n_k \to \infty, \text{ が存在}) = 1.$$

よって，

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{\log n}} \geqq (1-\delta)\sqrt{2}) = 1$$

であり，δ は任意だから

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{\log 2}} \geqq \sqrt{2}) = 1.$$

(*) と合わせて結論を得る．
(iii) $\overline{X_n}$ は正規分布 $N(m, \sigma^2/n)$ に従うから，

$$P(\overline{X_n} - m \geqq \varepsilon) = \int_{m+\varepsilon}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \exp\left[-\frac{n(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{n}\varepsilon/\sigma}^\infty e^{-y^2/2}\, dy.$$

従って，(i) より

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{n}\varepsilon/\sigma}{1+n\varepsilon^2/\sigma^2} e^{-n\varepsilon^2/2\sigma^2} \leqq P(\overline{X_n} - m \geqq \varepsilon) \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}\varepsilon} e^{-n\varepsilon^2/2\sigma^2}.$$

従って，$n^{-1}\log n \to 0, n \to \infty$, に注意すれば結論を得る．
(iv) X_i の積率母関数は，$M(\lambda) = \exp(\lambda m + \lambda^2\sigma^2/2)$. よって，

$$I(c) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \{c\lambda - \lambda m - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\} = \frac{(c-m)^2}{2\sigma^2}.$$

あとは定理 2.11 を $c = m + \varepsilon$ として使えばよい．