第４章の問題，解答例

4.1　(i) $\Omega \cap \{\tau \leqq n\} = \{\tau \leqq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n,$ より $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$.
(ii) $A \in \mathcal{F}_\tau$ とすると，$(A \cap \{\tau \leqq n\})^c \in \mathcal{F}_n$ より

$$A^c \cap \{\tau \leqq n\} = \{\tau \leqq n\} \cap (A \cap \{\tau \leqq n\})^c \in \mathcal{F}_n.$$

(iii) $A_1, A_2, ..., \in \mathcal{F}_\tau$ とすると

$$(\bigcup_i A_i) \cap \{\tau \leqq n\} = \bigcup_i (A_i \cap \{\tau \leqq n\}) \in \mathcal{F}_n.$$

τ が $\mathcal{F}_\tau$-可測な確率変数であることは，非負整数 k, n に対して
(イ) $k \leqq n$ であれば，$\{\tau = k\} \cap \{\tau \leqq n\} = \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n,$
(ロ) $k > n$ であれば，$\{\tau = k\} \cap \{\tau \leqq n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n,$ であることから分かる．

4.2　条件付期待値の tower property (定理 1.27 (vi)) より，確率 1 で

$$E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[E[X|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_{n-1}] = E[X|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}.$$

4.3　$X_1, ..., X_n$ は $\mathcal{F}_n$-可測だから，$\mathcal{X}_n \subset \mathcal{F}_n$. 条件付期待値の tower property より，

$$E[X_n|\mathcal{X}_{n-1}] = E[E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{X}_{n-1}].$$

$\{X_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$ に関するマルチンゲールであること，X_{n-1} が $\mathcal{X}_{n-1}$-可測であることから，確率 1 で

$$E[E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{X}_{n-1}] = E[X_{n-1}|\mathcal{X}_{n-1}] = X_{n-1}.$$

4.4　Jensen の不等式より，容易に分かる．

4.5　S_{n-1} は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測で，$S_n - S_{n-1} = X_n$ は $\mathcal{F}_{n-1}$ と独立だから，確率 1 で

$$E[e^{\sigma S_n - rn}|\mathcal{F}_{n-1}] = E[e^{\sigma(S_{n-1}+X_n)-rn}|\mathcal{F}_{n-1}] = e^{\sigma S_{n-1}-rn}E[e^{\sigma X_n}|\mathcal{F}_{n-1}] = e^{\sigma S_{n-1}-rn}E[e^{\sigma X_n}].$$

従って，$E[e^{\sigma X_n}] = (e^\sigma + e^{-\sigma})/2 = e^r$，つまり，$r = \log((e^\sigma + e^{-\sigma})/2)$ であればよい．

4.6　(i) 4.5 と同じ記号を使う．

$$\begin{aligned}E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= E[(S_{n-1}+X_n)^n - n|\mathcal{F}_{n-1}] = (S_{n-1})^2 + 2S_{n-1}E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] + E[(X_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] - n \\ &= (S_{n-1})^2 + 1 - n = M_{n-1}, \quad a.s.\end{aligned}$$

任意停止定理より，$\{M_{n\wedge\tau}\}$ もマルチンゲールである．よって，$E[M_{n\wedge\tau}] = E[M_0] = 0.$ $|M_{n\wedge\tau}| \leqq \max\{a, b\}$ だから有界収束定理が適用できて，$n \to \infty$ として $E[M_\tau] = 0$ を得る．
(別解) Wald の等式を用いるには，$E[\tau] < \infty$ を示す必要がある．このために，$x \in (-a, b)$ に対して，右または左に $a+b$-step 移動する経路を考えれば，

$$P(x + S_{a+b} \notin (-a, b)) \geqq 2^{-(a+b)}$$

が分かることに注意する．これから，$P(\tau > n(a+b)) \leqq (1 - 2^{-(a+b)})^n$ が得られて，$E[\tau] < \infty$ が分かる．
　従って，Wald の等式が適用できて，$E[M_\tau] = E[X_1]E[\tau] = 0$ を得る．
(ii) $E[M_\tau] = 0$ より，(3.1) を用いると

$$E[\tau] = E[(S_\tau)^2] = (-a)^2\frac{b}{a+b} + b^2\frac{a}{a+b} = ab.$$

4.7　(i) は容易．(ii) については，まず命題 3.15 より

$$P(\tau_{-a} < \tau_b) = \frac{f(b) - 1}{f(b) - f(-a)}.$$

$b \to \infty$ とすると，$f(b) \to 0$ より

$$P(\tau_{-a} < \infty) = \frac{1}{f(-a)} = \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

一方，

$$P(\tau_{-a} > \tau_b) = \frac{1 - f(-a)}{f(b) - f(-a)}.$$

$a \to \infty$ とすると $f(-a) \to \infty$ だから，$P(\tau_b < \infty) = 1$ を得る．
(iii) $P(\min_n S_n \leqq -a) = P(\tau_{-a} < \infty) = (q/p)^a$ より，

$$E[\min_n S_n] = -\sum_{a=1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^a = -\frac{1-p}{2p-1}.$$

(iv) $\{S_n - (2p-1)n\}$ がマルチンゲールであることは容易に分かる．任意停止定理より，$\{S_{n\wedge\tau_b} - (2p-1)(n\wedge\tau_b)\}$ もマルチンゲールであり，

$$E[S_{n\wedge\tau_b}] = (2p-1)E[n \wedge \tau_b].$$

ここで，両辺の $n \to \infty$ としたときの極限を考える．$|S_{n\wedge\tau_b}| \leqq b \vee |\min_m S_m|$ より，(iii) を用いると左辺に対しては Lebesgue の収束定理が適用できる．右辺に対しては単調収束定理が使えるから，$n \to \infty$ とすると，$S_{\tau_b} = b$ より $(2p-1)E[\tau_b] = b$ が得られる．

4.8 (i) Hölder の不等式より，$E[|M_n|] \leqq \{E[|M_n|^p]\}^{1/p}$. 従って，仮定から $\sup_n E[|M_n|] < \infty$ であり，定理 4.11 より M_n は概収束する．
(ii) $M_0 = 0$ としてよい．Doob の不等式より

$$E[\max_{1\leqq k\leqq N} |M_k|^p] \leqq C_p E[|M_N|^p] \leqq C_p \sup_n E[|M_n|^p]$$

となる正定数 C_p が存在する．左辺は N に関して単調増加であり，$N \to \infty$ とすると

$$E[\sup_{k\geqq 0} |M_k|^p] \leqq C_p \sup_n E[|M_n|^p].$$

よって，$\sup_k |M_k| \in L^p$.
(iii) (i) で存在を示した極限を M_∞ とすると，$|M_n - M_\infty| \leqq 2\sup_k |M_k| \in L^p$ より，Lebesgue の収束定理が適用できて $E[|M_n - M_\infty|^p] \to 0, n \to \infty$.

4.9 (i) Kolmogorov の不等式より

$$P(\max_{n\leqq m\leqq N} |S_m - S_n| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{N} V[\xi_k]$$

となることから結論を得る．
(ii) 上の不等式で，n を固定して $N \to \infty$ とすると，

$$P(\sup_{m\geqq n} |S_m - S_n| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} V[\xi_k].$$

これから，部分列 $\{n_j\}, n_j \to \infty$, が存在して，

$$P(\sup_{m\geqq n_j} |S_m - S_{n_j}| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{1}{2^j}.$$

よって，Borel-Cantelli の補題より

$$P(\sup_{m\geqq \ell} |S_m - S_\ell| < \varepsilon \text{ となる } \ell \text{ が存在}) = 1.$$

これは，$\{S_n\}$ が確率 1 で Cauchy 列であることを示す．
(iii) $\xi_n = n^{-1}\sin(nt)X_n$ とおくと，$V[\xi_n] \leqq n^{-2}V[X_n]$ より，問題の条件をみたす．