# 第１章の本文中の問に対する解答例

**問１ (p.3)**　$r = 0, 1, 2, ...,$ に対して

$$\binom{n}{r}\left(\frac{C}{n}\right)^r\left(1-\frac{C}{n}\right)^{n-r} = \frac{C^r}{r!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-(r-1)}{n}\left(1-\frac{C}{n}\right)^{n-r}$$

であり，$(1 - Cn^{-1})^{n-r} \to e^{-C}$, $n \to \infty$, を用いると結論を得る．

**問２ (p.14)**　$g_n = \inf_{k \geqq n} f_k \leqq f_n$ より $\int g_n d\mu \leqq \int f_n d\mu$ である．従って，

$$\liminf_{n\to\infty}\int g_n d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu$$

が成り立つ．ところが，$g_n$ は単調増加だから単調収束定理を用いると左辺は極限が存在することが分かり，

$$\liminf_{n\to\infty}\int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

となり，Fatou の補題を得る．

**問３ (p.15)**[伊藤清三，ルベーグ積分入門，定理 14.2 参照]　$\omega \in \Omega$ を固定すると，平均値の定理より $\delta > 0$ に対して

$$\frac{f(\omega, x+\delta) - f(\omega, x)}{\delta} = \frac{\partial}{\partial x} f(\omega, x + \theta\delta)$$

となる $\theta, 0 < \theta < 1,$ が存在する．従って，仮定 (iii) を用いると

$$\left|\frac{f(\omega, x+\delta) - f(\omega, x)}{\delta}\right| \leqq g(\omega)$$

が成り立つ．従って，Lebesgue の収束定理を適用できて，0 に収束するすべての数列 $\{\delta_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{f(\omega, x+\delta_n) - f(\omega, x)}{\delta_n}\,\mu(d\omega) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} f(\omega, x)\,\mu(d\omega)$$

が成り立つことが分かり，結論を得る．

**問４ (p.16)**　(i) $\Omega = X^{-1}(\mathbf{R}) \in \sigma\{X\}$.
(ii) $A = X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}},$ とすると，$A^c = X^{-1}(\mathbf{R} \setminus B) \in \sigma\{X\}$.
(iii) $A_i = X^{-1}(B_i), B_i \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, i = 1, 2, ...,$ とすると，$\cup_i B_i \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ であり，$\cup_i A_i = X^{-1}(\cup_i B_i) \in \sigma\{X\}$.

**問５ (p.16)**　$A \in \sigma\{Y\}$ に対して，$B \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ が存在して $A = X^{-1}(f^{-1}(B))$. $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ より $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \sigma\{X\}$ であり，$\sigma\{Y\} \subset \sigma\{X\}$ を得る．

　$f$ が１対１写像ではないときを考えると，一般に $\sigma\{Y\} \subset \sigma\{X\}$ であることが分かる．

**問６ (p.19)**　1.7 節で述べてある積率母関数，特性関数を計算し，その１対１性を用いる方が証明は容易であるが，ここでは確率分布を直接計算する．

　(i) $k = 0, 1, ..., n+m$ に対して，仮定から

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{r=0}^{k} P(X=r, Y=k-r) = \sum_{r=0}^{k} P(X=r)P(Y=k-r) \\
&= \sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\binom{m}{k-r}p^{k-r}(1-p)^{m-(k-r)} \\
&= \sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}\cdot p^k(1-p)^{n+m-k}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで公式 $\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}$ （理由は考えて下さい）を用いると，結論を得る．

(ii) $u \in \mathbf{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
P(X+Y \leqq u) &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x+y\leqq u\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\,dx\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{u-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(z-x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\,dz \\
&= \int_{-\infty}^{u} dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x-\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\left(\frac{m_1}{\sigma_1^2}+\frac{z-m_2}{\sigma_2^2}\right)\right)^2\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times\exp\left[-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]\,dx
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(x-m')^2\right]\,dx = 1, \quad \forall m' \in \mathbf{R},
$$

を用いると（平均 $m'$, 分散 $\sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ の正規分布）, 上の重積分において $x$ に関する積分が実行できて

$$
P(X+Y \leqq u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^1+\sigma_2^2)}}\exp\left[-\frac{(z-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]\,dz
$$

が得られる.

**問 7 (p.20)**　任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して,

$$
\{\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が有界 }\} = \{\{X_{m+n}\}_{n=1}^{\infty} \text{ が有界 }\} \in \mathcal{B}^m.
$$

従って, $\{\{X_n\}$ が有界 $\} \in \bigcap_m \mathcal{B}^m = \mathcal{B}^\infty$. 同様に,

$$
\{n^{-1}(X_1+\cdots+X_n) \text{ が収束 }\} = \{n^{-1}(X_{m+1}+\cdots+X_n) \text{ が収束 }\} \in \mathcal{B}^m
$$

より, 結論を得る.

**問 8 (p.21)**　(i) $X$ が二項分布 $B(n,p)$ に従うとすると, $E[X]=np, V[X]=np(1-p)$.
**証明.**　$n \geqq 2$ のときのみ示す.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r} = \sum_{r=1}^{n}\frac{n\cdot(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}pp^{r-1}(1-p)^{n-r} \\
&= np\sum_{r=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!}p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)} \\
&= np(p+(1-p))^{n-1} = np. \\
V[X] &= E[X^2]-(np)^2 = E[X(X-1)]+E[X]-(np)^2 \\
&= np-(np)^2+\sum_{r=0}^{n} r(r-1)\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r} \\
&= np-(np)^2+n(n-1)p^2\sum_{r=2}\frac{(n-2)!}{(r-2)!((n-2)-(r-2))!}p^{r-2}(1-p)^{(n-2)-(r-2)} \\
&= np-(np)^2+n(n-1)p^2 = np(1-p).
\end{aligned}
$$

(ii) $X$ がパラメータ $p$ の幾何分布に従うとすると, $E[X]=(1-p)/p, V[X]=(1-p)/p^2$.
**証明.** 計算すべき量は, $E[X]=\sum_{r=0}^{\infty} r(1-p)^r p, E[X^2]=\sum_{r=0}^{\infty} r^2(1-p)^r p$.

$$
f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} px^r = \frac{p}{1-x}, \qquad |x|<1,
$$

とおく.

$$
f'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} prx^{r-1} = \frac{p}{(1-x)^2}, \qquad f'(1-p) = \sum_{r=0}^{\infty} r(1-p)^{r-1}p,
$$

より，平均は次から得られる：

$$E[X]=\sum_{r=0}^{\infty}r(1-p)^rp=(1-p)f'(1-p)=\frac{1-p}{p}.$$

次に，$xf'(x)=\sum_{r=0}^{\infty}prx^r$ の両辺を微分して

$$\sum_{r=0}^{\infty}pr^2x^{r-1}=f'(x)+xf''(x)=\frac{p}{(1-x)^2}+\frac{2px}{(1-x)^3}.$$

従って，両辺に $x$ を掛けて $x=1-p$ を代入すると，

$$E[X^2]=\sum_{r=0}^{\infty}r^2(1-p)^rp=\frac{1-p}{p}+\frac{2(1-p)^2}{p^2}.$$

従って，分散は

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{1-p}{p}+\frac{2(1-p)^2}{p^2}-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2=\frac{1-p}{p^2}.$$

(iii) $X$ がパラメータ $C$ の Poisson 分布に従うとき，$E[X]=C, V[X]=C$.
**証明．** 指数関数の Mclaurin 展開 $e^x=\sum_{r=0}^{\infty}x^r/r!$ を用いると，

$$\begin{aligned}
E[X]&=\sum_{r=0}^{\infty}re^{-C}\frac{C^r}{r!}=e^{-C}C\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C^{r-1}}{(r-1)!}=e^{-C}Ce^C=C.\\
V[X]&=E[X^2]-C^2=E[X(X-1)]+E[X]-C^2\\
&=\sum_{r=0}^{\infty}r(r-1)e^{-C}\frac{C^r}{r!}+C-C^2=e^{-C}C^2\sum_{r=2}^{\infty}\frac{C^{r-2}}{(r-2)!}+C-C^2\\
&=C^2+C-C^2=C.
\end{aligned}$$

(iv) $X$ が正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従うなら，$E[X]=m, V[X]=\sigma^2$.
**証明．** 平均に関しては，$te^{-t^2/2}$ が奇関数であることより次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx&=\int_{\mathbf{R}}(x-m)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx+m\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx\\
&=\sigma\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-t^2/2}\,dt+m=m.
\end{aligned}$$

分散に関しては，部分積分法を用いて

$$\begin{aligned}
V[X]&=\int_{\mathbf{R}}(x-m)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}t^2e^{-t^2/2}\,dt\\
&=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}t(-e^{-t^2/2})'\,dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt=\sigma^2.
\end{aligned}$$

(v) $X$ がパラメータ $0,1$ の Cauchy 分布に従う場合を考えると，

$$E[|X|]=\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\pi}\frac{|x|}{1+x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d}{dx}\log(1+x^2)\,dx=\infty.$$

**問９ (p.21)**　命題 1.23 において，$X$ を $|X|^p$，$Y$ を 1, $p$ を $p'/p$ におきかえると，

$$E[|X|^p]\leqq\left\{E[(|X|^p)^{p'/p}]\right\}^{p/p'}=\left\{E[|X|^{p'}]\right\}^{p/p'}$$

が分かる．従って，$\left\{E[|X|^p]\right\}^{1/p}\leqq\left\{E[|X|^{p'}]\right\}^{1/p'}$ を得る．

**問１０ (p.27)**　(i) $X$ が二項分布 $B(n,p)$ に従うなら，二項定理より

$$\begin{aligned}
E[e^{\sqrt{-1}\xi X}]&=\sum_{r=0}^{n}e^{\sqrt{-1}\xi r}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(pe^{\sqrt{-1}\xi})^r(1-p)^{n-r}\\
&=(pe^{\sqrt{-1}\xi}+1-p)^n.
\end{aligned}$$

(ii) $X$ がパラメータ $C$ の Poisson 分布に従うなら，$\mathbf{C}$ 上の指数関数の $z=0$ における Taylor 展開を用いて

$$E[e^{\sqrt{-1}\xi X}] = \sum_{r=0}^{\infty} e^{\sqrt{-1}\xi r} e^{-C} \frac{C^r}{r!} = e^{-C} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(Ce^{\sqrt{-1}\xi})^r}{r!} = \exp(C(e^{\sqrt{-1}\xi} - 1)).$$

(iii) $X$ が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うなら，

$$E[e^{\sqrt{-1}\xi X}] = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \quad = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-(m+\sqrt{-1}\sigma^2\xi))^2/2\sigma^2} dx \times e^{\sqrt{-1}m\xi - \sigma^2\xi^2/2}$$

である．ここで，Cauchy の積分定理を用いると

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-(m+\sqrt{-1}\sigma^2\xi))^2/2\sigma^2} dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx = 1$$

が得られるから，$E[e^{\sqrt{-1}\xi X}] = \exp(\sqrt{-1}m\xi - \sigma^2\xi^2/2)$ を得る．
(iv) $X$ がパラメータ $m, c$ の Cauchy 分布に従うなら，

$$E[e^{\sqrt{-1}\xi X}] = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} \frac{c}{\pi} \frac{1}{c^2 + (x-m)^2}\, dx.$$

$f(z) = (c^2 + (z-m)^2)^{-1} e^{\sqrt{-1}\xi x}$ とおくと，$f$ は $\mathbf{C}$ 上の有理型関数で $z = m \pm \sqrt{-1}c$ において 1 位の極をもつ．$R > c$ に対して中心 $m$，半径 $r$ の半円を上半平面で考えると，留数定理より

$$\begin{aligned}\int_{m-R}^{m+R} \frac{c}{\pi} \frac{e^{\sqrt{-1}\xi x}}{c^2 + (x-m)^2}\, dx + \int_0^{\pi} \frac{c}{\pi} \frac{\exp(\sqrt{-1}\xi(m + Re^{\sqrt{-1}\theta}))}{c^2 + (Re^{\sqrt{-1}\theta})^2} Re^{\sqrt{-1}\theta}\sqrt{-1}d\theta \\ = \frac{c}{\pi} 2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Res}(f; z = m + \sqrt{-1}c)\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{Res}(f; z = m + \sqrt{-1}c)$ は $f$ の $z = m + \sqrt{-1}c$ における留数である．$\xi > 0$ であれば，

$$\begin{aligned}&\left| \int_0^{\pi} \frac{\exp(\sqrt{-1}\xi Re^{\sqrt{-1}\theta})}{c^2 + (Re^{\sqrt{-1}\theta})^2} Re^{\sqrt{-1}\theta} d\theta \right| \leqq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2 - c^2} e^{-\xi R \sin\theta}\, d\theta \to 0, \quad R \to \infty, \\ &\mathrm{Res}(f; z = m + \sqrt{-1}c) = \frac{e^{-c\xi}}{2\sqrt{-1}c},\end{aligned}$$

が成り立つから，$E[e^{\sqrt{-1}\xi X}] = e^{-c\xi}, \xi > 0,$ を得る．

　$\xi < 0$ のときは，下半平面に中心 $m$，半径 $R$ の半円を考えて，同様の議論をすると，結論を得る．

**問１１ (p.27)**　(i) 二項分布 $B(n,p)$ の積率母関数は $(pe^{\lambda} + 1 - p)^n$，
(ii) パラメータ $C$ の Poisson 分布の積率母関数は $\exp(C(e^{\lambda} - 1))$，
(iii) 正規分布 $N(m, \sigma^2)$ の積率母関数は $\exp(m\lambda + \sigma^2\lambda^2/2)$．

**問１２ (p.28)**　$[-n, n]$ 上の一様分布の特性関数 $\varphi_n$ は，

$$\varphi_n(\xi) = \int_{-n}^{n} e^{\sqrt{-1}\xi x} \frac{1}{2n}\, dx = \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} \cos(\xi x)\, dx = \frac{\sin(n\xi)}{n\xi}.$$

従って，

$$\begin{aligned}&\xi = 0 \text{ ならば } \varphi_n(0) = 1 = \varphi(0), \\ &\xi \neq 0 \text{ ならば } \varphi_n(\xi) \to 0 = \varphi(\xi)\end{aligned}$$

である．$\varphi$ は $\xi = 0$ において連続ではないので，定理 1.34 より $\varphi$ は特性関数にはなり得ない．