演習問題解答 (第 4 章)

4.1 $p = \begin{bmatrix} p_{11} & \alpha^T \\ \alpha & \tilde{P} \end{bmatrix}$ とおくと

$$p_{11}\lambda^2 + 2\alpha^T x \cdot \lambda + x^T \tilde{P} x > 0,\ \forall\lambda,\ \forall x$$

これより $p_{11} > 0,\ L = \frac{1}{p_{11}}\alpha\alpha^T - \tilde{P} > 0.$ L は $(n-1)\times(n-1)$ 行列であるから，帰納法の過程を用いると L の $(n-1)$ 個の首座小行列式はすべて正．これよりサイズ n の行列に対する主張が示される．

4.2 省略

4.3

$$A + A^T = -2\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 y は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

としたとき，$y(t) = Ce^{At}x(0)$ とあらわされる．これより

$$\int_0^\alpha y(t)^2 dt = x(0)^T \big(\int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt\big) x(0)$$

これよりリャプノフ方程式

$$PA + A^T P = -C^T C$$

の解を用いて

$$\int_0^\infty y(t)^2 dt = x(0)^T P x(0).$$

解は 39/20

4.5 省略

4.6 (i) フルビッツ (ii) フルビッツでない (iii) フルビッツ

4.7 省略

4.8 $z(s) = \frac{K}{(s-j\omega)^n}$ のとき $s = j\omega + re^{j\theta}$ とおくと $z(s) = \frac{K}{r}e^{-jn\theta}$ となる．$n \geq 2$ の場合は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ なる任意の θ に対して $Rez(s) \geq 0$ となることは不可能．$z(s)$ に他の項がある場合は r を十分小さくすればこの項が優越するので上記の事実は成功する．

4.9 $CB + s^{-1}CAB + s^{-2}CA^2B + \cdots = 0$ であるから

$$C\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

これより $C = 0$.