

演習問題の解答の詳細

第5章の確認問題

(5.3). まず, 『単体的複体 L が連結』 $\iff H_0(L) \cong \mathbb{Z}$ であることに注意する (定理 4.7.4).

1. マイヤービートリス完全系列を考えると, $H_1(K) = \{0\}$ より

$$\{0\} \rightarrow H_0(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) \rightarrow H_0(K_1 \cup K_2) \rightarrow \{0\}$$

となる. $|K|, |K_1|, |K_2|$ がすべて連結であることとより, この完全系列は,

$$\{0\} \rightarrow H_0(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$$

となる. 準同型定理により

$$\mathbb{Z} = \text{Im}(g) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{Ker}(g) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{Im}(f) \tag{B.10}$$

であるが, $H_0(K_1 \cap K_2)$ での完全性より $\text{Ker}(f) = \{0\}$, つまり f は単射である. よって $\text{Im}(f) \cong H_0(K_1 \cap K_2)$ となり, (B.10) より

$$\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / H_0(K_1 \cap K_2)$$

になる.

定理 4.7.4 により $H_0(K_1 \cap K_2)$ はいくつかの \mathbb{Z} の直和になるが, この式が成り立つのは $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}$ のときのみである. 最初の注意より, これは $K_1 \cap K_2$ が連結であることを表している.

2. 例えば, 図 B.11 のような単体的複体を K とする. また, $K_1 := \{|a_0, a_1|, |a_1, a_2|, |a_2, a_0|, |a_0|, |a_1|, |a_2|\}$,

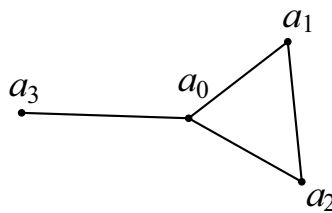


図 B.11

$K_2 := \{|a_0, a_3|, |a_0|, |a_3|\}$ とおく. すると $|K_1 \cap K_2| = \{|a_0|\}$ は連結であるが, $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ となる (確認).

(5.5). $z := x_1 + x_2\sqrt{-1}$, $w := x_3 + x_4\sqrt{-1}$ とおくと,

$$zw = (x_1x_3 - x_2x_4) + (x_1x_4 + x_2x_3)\sqrt{-1}$$

だから

$$\begin{aligned} Z &= f^{-1}(S^1) \\ &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1, 4(\Re(zw))^2 + 4(\Im(zw))^2 = 1, |w|^2 = |z|^2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \\ &\quad 4(x_1x_3 - x_2x_4)^2 + 4(x_1x_4 + x_2x_3)^2 = 1, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2\} \\ &\cong \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1/2\} \\ &\cong S^1 \times S^1 \end{aligned}$$

したがって, 例 4.5.5 より

$$H_q(Z) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

となる.

注意 B.0.19. この写像 $f: S^3 \rightarrow S^2$ はホップ写像と呼ばれるものである. この写像および一般化については, 参考文献 [5], [3], [9], [2] を参照していただきたい.

(5.6). まず, W_1 と W_2 を x, y に沿って貼り合わせると, 図 B.12 のような円環 ($S^1 \times [0, 1]$) になる. これと W_3 を c, e, a に沿って貼り合わせると, 図 B.13 のようになる. これは, 図 B.14 の

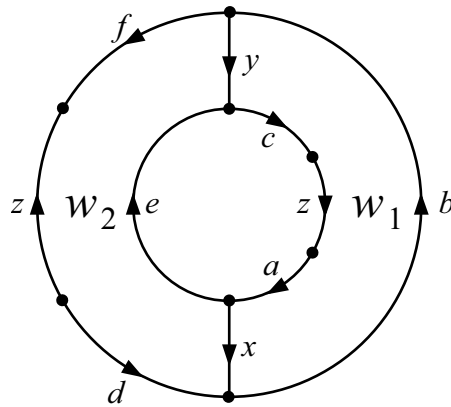


図 B.12 W_1 と W_2 を x, y に沿って貼り合わせる

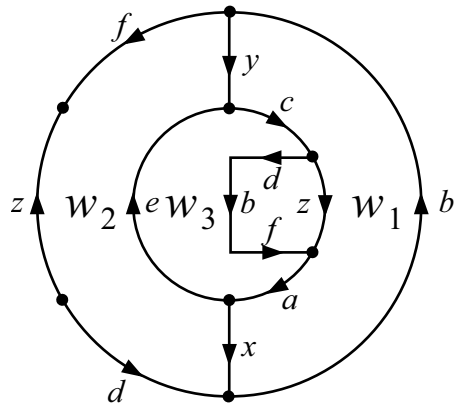


図 B.13 図 B.12 と W_3 を c, e, a に沿って貼り合わせる

ような円環である． X は，図 B.14 の右と左の円周を文字に従って貼り合わせたものである．とこ

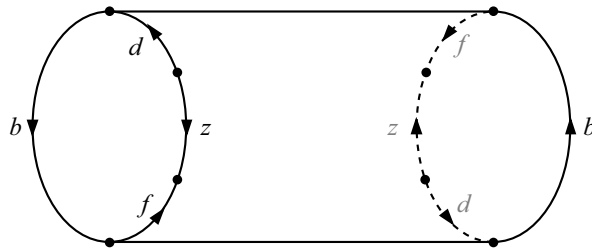


図 B.14 図 B.13 の形を整えたもの

ろで，この円環の右端をつまんで向こう側に 180 度ひねって貼り合わせるにより，出来上がった図形は円環面（例 4.5.5 参照）になることがわかる．よって，求めるホモロジー群は例 4.5.5 より

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 3 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．

(5.4). まず，問題の中の 1 点コンパクト化について説明しておこう．

注意 B.0.20. \mathbb{R}^2 を \mathbb{R}^3 の xy -平面だと考える． $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の“北極” $N := (0, 0, 1)$ と $S^2 \setminus N$ の点 P を直線で結び， \mathbb{R}^2 との交点を Q とする． P を Q に移す写像は $S^2 \setminus N$ と \mathbb{R}^2 の間の同相写像になることがわかる（確認）．これを立体射影と言う．

立体射影により \mathbb{R}^2 を S^2 の部分空間（定義 A.2.9）とみなすことができる．

同様に, $S^3 \setminus N'$ (N' は S^3 の“北極”) から \mathbb{R}^3 への立体射影を定義することができ, \mathbb{R}^4 は S^3 の部分空間とみなすことができる.

逆に S^2 を \mathbb{R}^2 に点 N を付け加えた空間, S^3 を \mathbb{R}^3 に点 N' を付け加えた空間とみなしたとき, S^2 を \mathbb{R}^2 の, S^3 を \mathbb{R}^3 の, それぞれ 1 点コンパクト化と言う (一般の位相空間の 1 点コンパクト化については, たとえば参考文献 [7] を参照していただきたい.)

また, 問題の「拡張」の意味は, 以上のように $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ をそれぞれ S^2, S^3 の部分空間とみなし, それらの間の連続写像が S^2 から S^3 へのある連続写像の制限となっているということである.

さて, まず (連続性はまだわからない) 写像 $\tilde{f}: S^2 \rightarrow S^3$ を, $S^2 \setminus N$ の点を f で移し, N は N' に移すものとして定義する. \tilde{f} が連続であることを示そう.

S^3 の任意の開集合の \tilde{f} による逆像が S^2 の開集合であることを示せばよい. $U \subset S^3$ が N' を含まない開集合のときは $\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ だから開集合である. 次に, $S^3 \supset U \ni N$ のときを考える. U は S^3 の開集合であるから, 定義 A.1.3 より $\varepsilon > 0$ が存在して N' からの (\mathbb{R}^4 での) 距離が ε より小さい点の集合 $B_\varepsilon(N')$ はすべて U に含まれる. $B_\varepsilon(N') \setminus N'$ を立体射影で \mathbb{R}^3 に移すと, 領域 $V := \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > \varepsilon'\}$ (ε' は ε によって定まる正の数) になる. よって, $f^{-1}(V)$ が \mathbb{R}^2 の開集合であればよい. つまり, ある $\delta > 0$ に対して $f^{-1}(V) \supset \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} > \delta\}$ が成り立てば $f^{-1}(U)$ は開集合になる (確認).

以上をまとめると \tilde{f} が連続であることを示すには,

任意の $\varepsilon' > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 「 $\sqrt{x^2 + y^2} > \delta$ なら $|f(x, y)| > \varepsilon'$ 」が成立する.

を示せばよいことになる. $|f(x, y)|^2 = (x^2 + y^2)^2 + x^2y^4 + y^6 \geq (x^2 + y^2)^2$ であるから, $\delta := \varepsilon'$ とおけば上の条件がみたされる.

よって \tilde{f} は連続である.

$\tilde{f}(S^2)$ は $f(\mathbb{R}^2)$ に N' を付け加えた空間になる. まず, $f(\mathbb{R}^2)$ を調べよう.

\mathbb{R}^2 の座標を (x, y) , \mathbb{R}^3 の座標を (X, Y, Z) とする. \mathbb{R}^3 内の平面 $Z = t$ と $f(\mathbb{R}^2)$ の共通部分を Π_t とおくと

$$\begin{aligned} \Pi_t &= \{(x^2 + y^2, xy^2, y^3) \mid x, y \in \mathbb{R}, y^3 = t\} \\ &= \{(x^2 + t^{2/3}, xt^{2/3}, t) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(Y^2t^{-4/3} + t^{2/3}, Y, t) \mid Y \in \mathbb{R}, t \neq 0\} \cup \{(x^2, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

となる. よって, Π_0 は X 軸の正の部分と原点, $t \neq 0$ のとき, Π_t は, X 軸を軸とし, 頂点 $(t^{2/3}, 0, 0)$ の (X 軸の正の方向に開いた) 放物線となる. これから, $Z \geq 0$ の部分は図 B.15 のようになることがわかる. これに N' を付け加えた図形は 2 次元球面 S^2_+ と同相で, (x 軸の正の部分と原点 $\cup N'$) に対応するのは, 球面上の弧である (確認). $Z \leq 0$ の部分は, $Z \geq 0$ の部分の, xy 平面に対する鏡像になっているので, これに N' を付け加えた図形も 2 次元球面 S^2_- と同相で, その中の弧が S^2_+ との共通部分である.

よって, $\tilde{f}(S^2) = S^2_+ \cup S^2_-$, $S^2_+ \cap S^2_- = I$ で I は閉区間 $[0, 1]$ と同相である. 2 次元球面のホモ

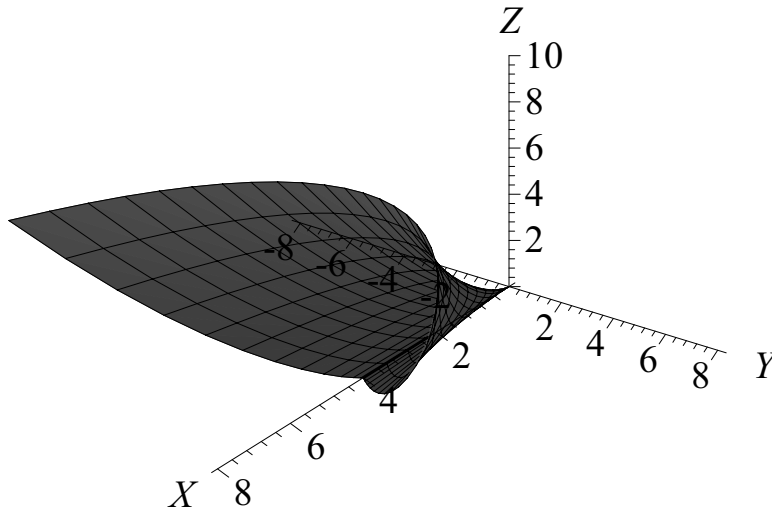


図 B.15 $f(\mathbb{R}^2)$ の $Z \geq 0$ の部分 (MAPLE 6 を使って作成)

ロジーク群 (命題 5.1.2) とマイヤー ビートリス完全系列より,

$$\{0\} \rightarrow H_2(S_+^2) \oplus H_2(S_-^2) \rightarrow H_2(\tilde{f}(S^2)) \rightarrow \{0\}$$

が得られる. これと, $\tilde{f}(S^2)$ が連結であることから,

$$H_q(\tilde{f}(S^2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 2 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

がわかる.

第 8 章の演習問題

(8.2). X は, 原点を中心とした半径 1 の球面と, 半径 2 の球面, および xy -平面上の半径 1 と半径 2 の円周で囲まれた部分 (円環) の和になっている (図 B.16 参照).

$$\mathbb{R}_z^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_z^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\}$$

とおく. また

$$X_1 = X \cap \mathbb{R}_z^+,$$

$$X_2 = X \cap \mathbb{R}_z^-,$$

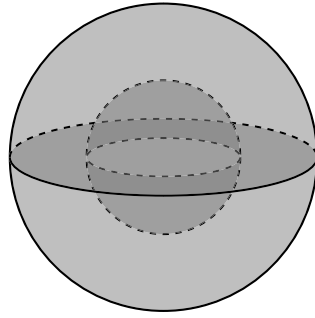


図 B.16 X

$$X' = X_1 \cap X_2$$

とする．このとき， X' は $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ となり $S^1 \times [0, 1]$ (円環) と同相である．また， X_1, X_2 はともに半径 2 の半球と半径 1 の半球を円環で貼り合わせた図形であるから， S^2 (球面) と同相である (図 B.17, 図 B.18 参照)． $S^1 \times [0, 1]$ は， S^1 とホモトピー

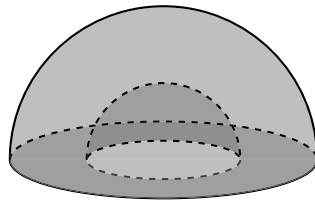


図 B.17 X_1

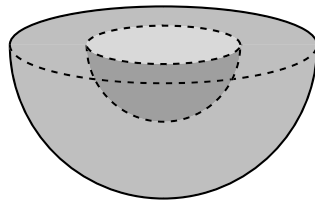


図 B.18 X_2

同値だから，例 4.5.3 より

$$H_q(X') = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．また，命題 5.1.2 より

$$H_q(X_1) = H_q(X_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 0, 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

がわかる．

$X = X_1 \cup X_2$, X_1 , X_2 , $X' = X_1 \cap X_2$ に関するマイヤー ビートリス完全系列は，

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) & \longrightarrow & H_n(X) & & \\ & & \longrightarrow & & H_{n-1}(X') & & \\ & & \longrightarrow & & H_{n-1}(X_1) \oplus H_{n-1}(X_2) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

となるが，上で求めたことと， X , X_1 , X_2 , X' がすべて連結であることよりより，これは

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_2(X) \\ & & \longrightarrow & & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & H_1(X) & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

となる ($H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ である)．これから直ちに $H_1(X) \cong \{0\}$ がわかる．また，演習 3.4 と演習 3.5 より $H_2(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である．よって

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 2 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 0, 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．

(8.3). 問題の図形を X とする．また，

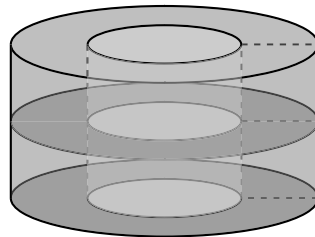


図 B.19 X

$$\mathbb{R}^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 2\},$$

$$\mathbb{R}^- := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 2\}$$

$$X_1 := X \cap \mathbb{R}^+,$$

$$X_2 := X \cap \mathbb{R}^-$$

とおく. $X_1 \cong X_2 \cong S^1 \times S^1$ (円環面 T), また, $X_1 \cap X_2 \cong S^1 \times [0, 1]$ (円環) であることがわかる. 例 4.5.5 より

$$H_q(X_1) = H_q(X_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 0, 1, 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. また, $S^2 \times [0, 1]$ は S^1 とホモトピー同値だから, 例 4.5.3 より

$$H_q(X_1 \cap X_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

がわかる. したがって, 演習問題 8.2 の解答と同様にマイヤー-ビートリス完全系列を用いると,

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_2(X) & \longrightarrow \\ \delta_2 \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & H_1(X) & \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

が得られる. ここで, $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ がすべて連結であることを使った. また, $i_1: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1, i_2: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_2, j_1: X_1 \rightarrow X, j_2: X_2 \rightarrow X$ は包含写像である.

$H_1(S^1 \times [0, 1]) \cong H_1(S^1)$ の生成元は円環を一周する円周であり, これを $H_1(X_k)$ の元とみたものが $H_1(X_k)$ の生成元の一つになる ($k = 1, 2$). (例 4.5.5 参照). よって, $(i_{1*}, i_{2*}): \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ は, \mathbb{Z} の生成元を $(1, 0, 1, 0) \in \mathbb{Z}^4$ に移す写像である. つまり, $\text{Ker}(i_{1*}, i_{2*}) = \{0\}$, $\text{Im}(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}$ である. したがって $\text{Im}(\delta_2) = \{0\}$ となり $H_2(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる. また, $\text{Ker}(j_{1*} - j_{2*}) = \text{Im}(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}$ であり, これは \mathbb{Z}^4 の 2 つの生成元の直和で生成されているので準同型定理から $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^3$ であることがわかる.

以上をまとめると

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 2 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 0, 1, 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる.

(8.5). m と n を入れ替えても $X_{m,n}$ は同相であるから, 以下 $m \geq n$ と仮定する.

$X_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}$, $X_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid |x| = |y|\}$, $X' := X_1 \cap X_2$ とおくと, $X_{m,n} = X_1 \cup X_2$ である.

まず, X_1 は $m+n-1$ 次元球面 S^{m+n-1} である. よって, 命題 5.1.2 より

$$H_q(X_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, m+n-1 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 0, m+n-1 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. また, X_2 は 次のようにして 1 点とホモトピー同値であることがわかる.

証明. $\Phi: X_2 \times [0, 1] \rightarrow X_2$ を $\Phi((x, y), t) := ((1-t)x, (1-t)y)$ で定義すると, これは id_{X_2} と $r: X_2 \rightarrow (0, 0)$ を結ぶホモトピーとなる. よって $r \circ \text{id}_{X_2} \sim \text{id}_{X_2}$, $\text{id}_{X_2} \circ r = \text{id}_{\{(0,0)\}}$ となり, X_2 は 1 点 $(0, 0)$ とホモトピー同値になる. \triangle

よって

$$H_q(X_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

である.

次に, $X' = X_1 \cap X_2$ について考える.

$$\begin{aligned} X' &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid |x|^2 + |y|^2 = 1, |x| = |y|\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}, |y| = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ &\cong S^{m-1} \times S^{n-1} \end{aligned}$$

となる.

$S^{m-1} \times S^{n-1}$ のホモロジー群を計算しよう. $S^{n-1} = D_1^{n-1} \cup D_2^{n-1}$, $D_1^{n-1} \cap D_2^{n-1} = S^{n-2}$ のように, S^{n-1} は 2 つの $(n-1)$ 次元円板の和に分かれる. (“赤道”で分ければよい. また, 命題 5.1.2 参照.) よって, $S^{m-1} \times S^{n-1} = (S^{m-1} \times D_1^{n-1}) \cup (S^{m-1} \times D_2^{n-1})$, $(S^{m-1} \times D_1^{n-1}) \cap (S^{m-1} \times D_2^{n-1}) = S^{m-1} \times S^{n-2}$ と分解することができる. n についての数学的帰納法により次の式を示す ($m \geq n$ と仮定していることに注意.)

$m > n > 1$ のとき

$$H_q(S^{m-1} \times S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = m+n-2, m-1, n-1, 0 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$m = n > 1$ のとき

$$H_q(S^{n-1} \times S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 2n-2, 0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = n-1 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

$m > n = 1$ のとき

$$H_q(S^{m-1} \times S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = m-1, 0 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

$m = n = 1$ のとき

$$H_q(S^0 \times S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

$n = 1$ のとき, S^0 は $\{1\}, \{-1\}$ の 2 点からなるので $S^{m-1} \times S^0$ は 2 つの S^{m-1} の非交和である. よって (B.13), (B.14) が成り立つ ($m = n = 1$ のとき $S^0 \times S^0$ は 4 点からなる.)

$n - 1 < m$ まで (B.11), (B.12) が成り立っていると仮定して n の場合を示す. $S^{m-1} \times D^{n-1}$ は S^{m-1} にホモトピー同値 (D^{n-1} を 1 点に縮めるホモトピーを使えばよい) だから, $S^{m-1} \times S^{m-1}$, $S^{m-1} \times D_1^{n-1}$, $S^{m-1} \times D_2^{n-1}$, $S^{m-1} \times S^{n-2}$ に関するマイヤー ビートリス完全系列は次の 3 つの部分以外 $\{0\}$ である (確認) (ただし, H_0 の部分は除く.)

$$\begin{aligned} \{0\} \rightarrow H_{m+n-2}(S^{m-1} \times S^{n-2}) \rightarrow H_{m+n-3}(S^{m-1} \times S^{n-2}) \\ \rightarrow H_{m+n-3}(S^{m-1} \times D_1^{n-1}) \oplus H_{m+n-3}(S^{m-1} \times D_2^{n-2}) \rightarrow \{0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{0\} \rightarrow H_{m-1}(S^{m-1} \times D_1^{n-1}) \oplus H_{m-1}(S^{m-1} \times D_2^{n-2}) \\ \rightarrow H_{m-1}(S^{m-1} \times S^{n-1}) \rightarrow \{0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{0\} \rightarrow H_{n-1}(S^{m-1} \times D_1^{n-1}) \oplus H_{n-1}(S^{m-1} \times D_2^{n-2}) \\ \rightarrow H_{n-1}(S^{m-1} \times S^{n-1}) \rightarrow \{0\} \end{aligned}$$

これらの式から (B.11), (B.12) が従う.

注意 B.0.21. ここで単体的複体の積のホモロジー群に関して知られている公式を紹介する.

命題 B.0.22 (キュネットの公式). X, Y を多面体とする. このとき次の同型が成り立つ.

$$H_q(X \times Y) \cong \bigoplus_{i=0}^q H_i(X) \otimes H_{q-i}(Y) \oplus \bigoplus_{j=0}^{q-1} \text{Tor}(H_j(X), H_{q-j-1}(Y))$$

ここで, アーベル群 G, H に対して $G \otimes H$ は G と H のテンソル積と呼ばれるもので, 次の性質を持つ.

- $G_1 \otimes G_2 \cong G_2 \otimes G_1$
- $(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3 \cong G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3)$
- $(G_1 \oplus G_2) \otimes G_3 \cong (G_1 \otimes G_3) \oplus (G_2 \otimes G_3)$
- $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\text{gcd}(m, n)\mathbb{Z}$

また, $\text{Tor}(G, H)$ は G と H のねじれ積と呼ばれるもので, 次の性質を持つ.

- $\text{Tor}(G_1, G_2) \cong \text{Tor}(G_2, G_1)$
- $\text{Tor}(\text{Tor}(G_1, G_2), G_3) \cong \text{Tor}(G_1, \text{Tor}(G_2, G_3))$

- $\text{Tor}(G_1 \oplus G_2, G_3) \cong \text{Tor}(G_1, G_3) \oplus \text{Tor}(G_2, G_3)$
- $\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}$
- $\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{0\}$
- $\text{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\text{gcd}(m, n)\mathbb{Z}$

ただし, $\text{gcd}(m, n)$ は m と n の最大公約数である.

キュネットの公式の証明は参考文献 [9], [3]などを参照していただきたい.

キュネット公式を使うとすぐに (B.11), (B.12), (B.13), (B.14) がわかる (確認).

さて, $X_{m,n}$ のホモロジー群の計算に戻ろう.

$m > n > 1$ のときは $X_{m,n}$, X_1 , X_2 , $X' = S^{m-1} \times S^{n-1}$ は連結だから, マイヤー ビートリス完全系列は次の 3 つの部分以外 $\{0\}$ である (確認) (H_0 の部分は除く.)

$$\{0\} \rightarrow H_{m+n-1}(X_1) \rightarrow H_{m+n-1}(X_{m,n}) \rightarrow H_{m+n-2}(X') \rightarrow \{0\}, \quad (\text{B.15})$$

$$\{0\} \rightarrow H_m(X_{m,n}) \rightarrow H_{m-1}(X') \rightarrow \{0\}, \quad (\text{B.16})$$

$$\{0\} \rightarrow H_n(X_{m,n}) \rightarrow H_{n-1}(X') \rightarrow \{0\} \quad (\text{B.17})$$

よってこの場合

$$H_q(X_{m,n}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = m + n - 1 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} & q = m, n, 0 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

となる (ここで, (B.15) が分裂する短完全系列であることを使った (演習問題 3.4, 演習問題 3.5 参照.))

$m = n > 1$ のときも同様に

$$H_q(X_{n,n}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 2n - 1, n \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

がわかる (確認).

また, $m > n = 1$ のとき, X' は 2 つの連結成分からなるので, (B.17) は

$$\{0\} \rightarrow H_1(X_{m,1}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$$

となるが, $\text{Im}(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}$ であることがわかるので (演習問題 8.5 の解答参照), $H_1(X_{m,1}) \cong \mathbb{Z}$ となる. また, (B.15), (B.16) は次の 1 つの式になる.

$$\{0\} \rightarrow H_m(X_1) \rightarrow H_m(X_{m,1}) \rightarrow H_{m-1}(X') \rightarrow \{0\}$$

よって

$$H_q(X_{n,1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = m \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} & q = 1, 0 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

が得られる。

$m = n = 1$ のときは X' は 4 点からなるので

$$\{0\} \rightarrow H_1(X_1) \rightarrow H_1(X_{1,1}) \rightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$$

が完全系列になる。上と同様に $\text{Im}(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}$ がわかるので、 $H_1(X_{1,1}) \cong \mathbb{Z}^4$ がわかった。つまり、

$$H_q(X_{1,1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

がわかる (確認)。

(8.6). 1. 写像 $g: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ を

$$g(w_1, w_2) := \left(\frac{w_1^s}{w_2^q}, \frac{w_2^p}{w_1^r} \right)$$

で定義する。このとき、

$$(g \circ f)(z_1, z_2) = g(z_1^p z_2^q, z_1^r z_2^s) = \left(\frac{(z_1^p z_2^q)^s}{(z_1^r z_2^s)^q}, \frac{(z_1^r z_2^s)^p}{(z_1^p z_2^q)^r} \right) = (z_1, z_2),$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(w_1, w_2) &= f\left(\frac{w_1^s}{w_2^q}, \frac{w_2^p}{w_1^r}\right) \\ &= \left(\left(\frac{w_1^s}{w_2^q}\right)^p \left(\frac{w_2^p}{w_1^r}\right)^q, \left(\frac{w_1^s}{w_2^q}\right)^r \left(\frac{w_2^p}{w_1^r}\right)^s \right) \\ &= (w_1, w_2) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $g \circ f, f \circ g$ はともに恒等写像となり、 f は同相写像である。

2. $S^1 \times S^1$ は円環面と同相であり、そのホモロジー群は次のようになる (例 4.5.5, 例 A.2.15, B.12 参照)。

$$H_q(S^1 \times S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 0, 1, 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

また、 $H_2(S^1 \times S^1)$ の生成元は円環面上の向きの付いた 2-単体すべての和、 $H_1(S^1 \times S^1)$ の生成元は $\mu := S^1 \times \{1\} \subset S^1 \times S^1$ と $\lambda := \{1\} \times S^1 \subset S^1 \times S^1$ (に向きを付けたもの)、 $H_0(S^1 \times S^1)$ の生成元は円環面上の向きの付いた 1 点であった。ここで、 μ, λ の向きは、パラメータ t ($t \in [0, 1]$) を使って $S^1 = \{\exp 2t\pi\sqrt{-1} \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}$ で付けることとする (つ

まり, t が増える方向に向きが付いているとする.)

μ, λ の f による像を調べよう.

$$f(\mu) = \{(\exp 2tp\pi\sqrt{-1}, \exp 2tr\pi\sqrt{-1}) \mid t \in [0, 1]\}$$

$$f(\lambda) = \{(\exp 2tq\pi\sqrt{-1}, \exp 2ts\pi\sqrt{-1}) \mid t \in [0, 1]\}$$

であるから, $f(\mu)$ は μ を p 回と λ を r 回, $f(\lambda)$ は μ を q 回と λ を s 回それぞれ回っていることがわかる (ただし, p, q, r, s が負のときはそれらの絶対値回の逆回りである.) よって $f_*: H_1(S^1 \times S^1) \rightarrow H_1(S^1 \times S^1)$ は

$$f_*(\mu) := p\mu + r\lambda,$$

$$f_*(\lambda) := q\mu + s\lambda$$

となる (あるいは, 基底 (μ, λ) に対し, 行列 $F := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で表される.)

次に, $f_*: H_2(S^1 \times S^1) \rightarrow H_2(S^1 \times S^1)$ を調べよう. $0 < \varepsilon < 1$ に対し, S^1 の弧 $J := \{\exp 2t\pi\sqrt{-1} \mid 0 \leq t \leq \varepsilon\}$ を考えると, $J \times J \subset S^1 \times S^1$ は円環面上の正方形になる. これを 2 つの三角形に分けて, それを使って図 4.5 のような三角形分割を作ることができる (確認). f は同相写像であるから, この三角形分割の像を用いてもう一つの $S^1 \times S^1$ の三角形分割が得られる. また, $J \times J$ は f によって $S^1 \times S^1$ の平行四辺形に移されるが行列 F の行列式が $ps - qr = 1 > 0$ であることから, この平行四辺形は $J \times J$ と同じ向きになることがわかる (確認). つまり, f は $H_2(S^1 \times S^1)$ の生成元を生成元に移すことがわかった. よって $f_*: H_2(S^1 \times S^1) \rightarrow H_2(S^1 \times S^1)$ は恒等写像になる. また, この三角形分割を使えば $f_*: H_0(S^1 \times S^1) \rightarrow H_0(S^1 \times S^1)$ も恒等写像になる.

3. $X_1 := S^1 \times D^2, X_2 := D^2 \times S^1, T := S^1 \times S^1$ とおくと, X, X_1, X_2, T に関するマイヤービートリス完全系列は次のようになる (これらはすべて連結であることに注意.)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \{0\} & \longrightarrow & H_3(X) \\ & & & & \longrightarrow & H_2(T) & \longrightarrow H_2(X_1) \oplus H_2(X_2) & \longrightarrow H_2(X) \\ & & & & \longrightarrow & H_1(T) & \longrightarrow H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) & \longrightarrow H_1(X) \\ & & & & \longrightarrow & \{0\} & & \end{array}$$

D^2 は 1 点とホモトピー同値だから (例 8.2.4 参照) $H_\bullet(X_1) \cong H_\bullet(X_2) \cong H_\bullet(S^1)$ である. よって上の完全系列は

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \{0\} & \longrightarrow & H_3(X) \\ & & & & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow \{0\} & \longrightarrow H_2(X) \\ & & & & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_1(X) \\ & & & & \longrightarrow & \{0\} & & \end{array}$$

となる. ただし, $i_1: T \rightarrow X_1, i_2: T \rightarrow X_2, j_1: X_1 \rightarrow X, j_2: X_2 \rightarrow X$ は包含写像である. この完全系列から, まず $H_3(X) \cong \mathbb{Z}$ がわかる. また, $H_2(X) \cong \text{Im}(\delta_2) \cong \text{Ker}(i_{1*}, i_{2*})$,

$H_1(X) \underset{\text{完全性}}{\cong} \text{Im}(j_{1*} - j_{2*}) \underset{\text{準同型定理}}{\cong} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{Im}(i_{1*}, i_{2*})$ である．そこで， i_{1*}, i_{2*} を詳しく調べてみよう．

$p_1: S^1 \times D^2 \rightarrow S^1$ を第 1 成分への射影とすると $i_1 \sim p_1, i_2 = p_1 \circ f$ である (確認)． $H_1(S^1 \times D^2) \cong H_1(S^1)$ の生成元を m とすると 2 より

$$i_{1*}(\mu) = m$$

$$i_{1*}(\lambda) = 0$$

$$i_{2*}(\mu) = pm$$

$$i_{2*}(\lambda) = qm$$

がわかる．よって (i_{1*}, i_{2*}) は，基底 $(\mu, \lambda), (m_1, m_2)$ に対して，行列 $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{pmatrix}$ で表される．
 これから， $\text{Ker}(i_{1*}, i_{2*}) = \{0\}$ ， $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{Im}(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}/|q|\mathbb{Z}$ であることがわかる (確認)．
 以上をまとめると

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 3 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}/|q|\mathbb{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

となる．

(8.7)． $|K|$ に“厚みをつけたもの”(K の各辺の周りの円柱と各頂点の周りの球体を合わせたもの) を N とおく． N は図 B.20 のようになる (点 $(-1, -1, -1)$ から原点の方を見た図である)．逆に， $|K|$ は N の“芯”と思える (図 B.21)． N において $|K|$ を 1 点につぶした空間 (つまり，

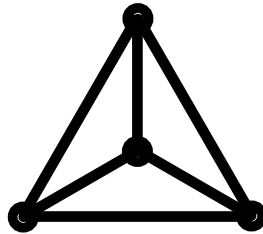


図 B.20 N

$|K|$ に含まれる任意の 2 点を同値とみなした商空間) を Y とおくと， Y は 1 点とホモトピー同値であることがわかる (N の点を $|K|$ に向かってつぶせばよい)．

X から Y の内部を取り除いた空間を Z とおくと Z は S^3 から N の内部を取り除いた空間ともみなせる．また， $Z \cap Y \cong Z \cap N$ は N の境界と同相，つまり種数 3 の曲面 F_3 と同相である (図 B.22)．

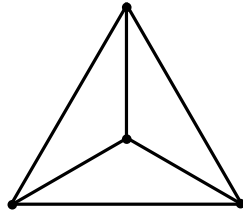


図 B.21 K

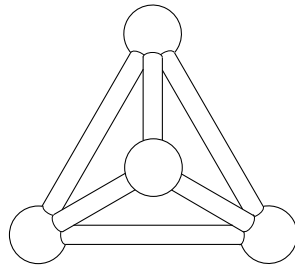


図 B.22 N の境界

まず, Z のホモロジー群を求めよう. S^3, N, Z, F_3 にマイヤー ビートリス完全系列を適用すると (これらはすべて連結であることに注意)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & H_3(F_3) & \longrightarrow & H_3(N) \oplus H_3(Z) & \longrightarrow & H_3(S^3) \\
 & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{\delta_3} & H_2(F_3) & \longrightarrow & H_2(N) \oplus H_2(Z) & \longrightarrow & H_2(S^3) \\
 & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & & H_1(S^3) \\
 & & \longrightarrow & & \{0\} & &
 \end{array}$$

が得られる. ここで, $i_1: F_3 \rightarrow N, i_2: F_3 \rightarrow Z$ はともに包含写像である. N は $|K|$ とホモトピー同値であり (N の点を $|K|$ に向かって動かせばよい) $|K|$ の 1 次元ホモロジー群は \mathbb{Z}^3 だから (確認)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & H_3(Z) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & & \\
 & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{\delta_3} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_2(Z) & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & & \mathbb{Z}^3 \oplus H_1(Z) \longrightarrow \{0\}
 \end{array}$$

が得られる. ここで, 連結準同型 $\delta_3: H_3(S^3) \rightarrow H_2(F^3)$ を詳しく見ていこう. 命題 5.1.2 と細分の誘導する準同型写像の定義 (第 5.2) より, $H_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ は S^3 の単体分割に現れる向きの付いた 3-単体全部の和 α_3 (のホモロジー類) で生成される. これらの 3-単体を $C_3(N)$ に含まれるものと $C_3(Z)$ に含まれるものに分け, 境界準同型で $C_2(N) \oplus C_2(Z)$ に移したものは, $N \cap Z = F_3$ に含まれる向きの付いた 2-単体全体の和とその符号を変えたものとの直和である (確認). これを F_3 の元とみなしたものが $\delta_3([\alpha_3]) \in H_2(F_3)$ である. とここで, 例 8.2.8 より, この元は $H_2(F_3)$ の生成

元となっている．よって， $\delta_3: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は生成元を生成元に移すことになり同型写像である．上の完全系列より $H_3(Z) = H_2(Z) \cong \{0\}$ ，および $H_1(Z) \cong \mathbb{Z}^3$ がわかる（確認）．また， $H_1(F_3) \cong \mathbb{Z}^6$ の生成元を，図 B.23 のように $\{m_1, m_2, m_3, l_1, l_2, l_3\}$ とおくと i_{1*} は m_1, m_2, m_3 を 0 に， l_1, l_2, l_3 を $H_1(N) \cong \mathbb{Z}^3$ の生成元に移すことがわかる（確認）．よって， i_{2*} は m_1, m_2, m_3 を $H_1(Z) \cong \mathbb{Z}^3$ の生成元に移さなければならない（確認）．

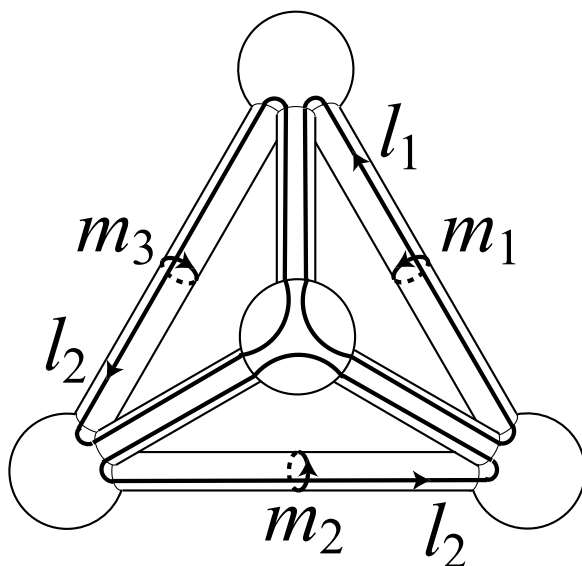


図 B.23 N の境界

次に X, Y, Z, F_3 にマイヤー－ピートリス完全系列を適用する．これらはすべて連結だから

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & H_3(F_3) & \longrightarrow & H_3(Y) \oplus H_3(Z) & \longrightarrow & H_3(X) \\
 & & \longrightarrow & & H_2(F_3) & \longrightarrow & H_2(Y) \oplus H_2(Z) & \longrightarrow & H_2(X) \\
 & & \longrightarrow & & H_1(F_3) & \xrightarrow{(i'_{1*}, i_{2*})} & H_1(Y) \oplus H_1(Z) & \longrightarrow & H_1(X) \\
 & & \longrightarrow & & \{0\} & & & &
 \end{array}$$

となる．ここで， $i'_1: F_3 \rightarrow Y$ は包含写像である．上の結果を使うと， $H_3(X) \cong H_2(F_3) \cong \mathbb{Z}$ および次の完全系列が得られる（確認）．

$$\{0\} \rightarrow H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z}^6 \xrightarrow{(i'_{1*}, i_{2*})} \mathbb{Z}^3 \rightarrow H_1(X) \rightarrow \{0\}$$

ここで， i'_{1*} は零写像， i_{2*} は \mathbb{Z}^6 のうちの 3 つの生成元を \mathbb{Z}^3 の生成元に移すので (i'_{1*}, i_{2*}) は全射，かつ $\text{Ker}(i'_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}^3$ がわかる．よって， $H_1(X) = \{0\}$ ， $H_2(X) = \mathbb{Z}^3$ である．

以上をまとめると

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 3 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 2 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる .

(8.10). (1) $\mathbb{R}P^2 \ni [x_0, x_1, x_2]$ は $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$ をみたすとする . $\Phi: \mathbb{R}P^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^2$ を

$$\Phi([x_0, x_1, x_2], t) := [x_0 \cos \pi t + x_1 \sin \pi t, -x_0 \sin \pi t + x_1 \cos \pi t, x_2]$$

で定義する (これが , 矛盾なく定義されていることを確認 .)

$\Phi([x_0, x_1, x_2], 0) = [x_0, x_1, x_2]$, $\Phi([x_0, x_1, x_2], 1) = [-x_0, -x_1, x_2] = [x_0, x_1, -x_2]$ だから , $t = 0, 1$ のとき Φ はそれぞれ id , f に一致する . よって , f は id にホモトープである (ホモトピックのことをホモトープとも言う) .

注意 B.0.23. Φ は“ z 軸に関する回転 ”になっている .

(2) id から f への , 基点 $[1 : 0 : 0]$ を保つホモトピー $\Psi: \mathbb{R}P^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^2$ が存在すると仮定して , 矛盾を導く . $\Psi_t: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ を $\Psi_t([x_0, x_1, x_2]) := \Psi([x_0, x_1, x_2], t)$ とおく ($\Psi_0 = \text{id}$, $\Psi_1 = f$ である .)

まず , $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, $p((x_0, x_1, x_2)) \mapsto [x_0 : x_1 : x_2]$ ($x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$) は被覆になっていることに注意しよう .

S^2 から S^2 への写像で $(x_0, x_1, x_2) \in S^2$ を $(x_0, x_1, -x_2)$ に移すものを g とおく . Ψ を使って , S^2 の恒等写像 id_{S^2} と g を結ぶホモトピー $\tilde{\Psi}$ を構成する .

まず , $x_0 \geq 0$ をみたく $(x_0, x_1, x_2) \in S^2$ を考える . $(1, 0, 0) \in S^2$ を始点 , (x_0, x_1, x_2) を終点とする道 $\rho_{(x_0, x_1, x_2), +}: [0, 1] \rightarrow S^2$ を , 大円を用いて定義する (つまり , $\rho_{(x_0, x_1, x_2), +}(0) := (1, 0, 0)$, $\rho_{(x_0, x_1, x_2), +}(1) := (x_0, x_1, x_2)$ とし , 他の $s \in (0, 1)$ に対しては , 2 点 $(1, 0, 0)$, (x_0, x_1, x_2) を通る大円の劣弧 (短いほうの弧) 上にとる .) 各 $t \in [0, 1]$ に対し , $\Psi_t \circ p \circ \rho_{(x_0, x_1, x_2), +}$ は , $[1 : 0 : 0]$ と $\Psi_t([x_0 : x_1 : x_2])$ を結ぶ道を定義することに注意しよう . 補題 9.1.3 により , S^2 上の道 $\tilde{\rho}_{t, (x_0, x_1, x_2), +}: [0, 1] \rightarrow S^2$ で $\tilde{\rho}_{t, (x_0, x_1, x_2), +}(0) = (1, 0, 0)$, $p \circ \tilde{\rho}_{t, (x_0, x_1, x_2), +} = \Psi_t \circ p \circ \rho_{(x_0, x_1, x_2), +}$ をみたすものが一意に定まる . そこで , $\tilde{\Psi}_+((x_0, x_1, x_2), t) := \tilde{\rho}_{t, (x_0, x_1, x_2), +}(1)$ と定める . $\tilde{\rho}_{0, (x_0, x_1, x_2), +} = \rho_{(x_0, x_1, x_2), +}$ だから $\tilde{\Psi}_{+, t} = \text{id}_{S^2}$ となる . ($\tilde{\Psi}_{+, t}((x_0, x_1, x_2)) := \tilde{\Psi}_+((x_0, x_1, x_2), t)$ とおく .) また , $\Psi_1 \circ p \circ \rho_{(x_0, x_1, x_2), +}$ は $[1 : 0 : 0]$ と $[x_0, x_1, -x_2]$ を結ぶ道だから $\tilde{\rho}_{1, (x_0, x_1, x_2), +}$ は $(1, 0, 0)$ と $(x_0, x_1, -x_2)$ を結ぶ道になり , $\tilde{\Psi}_{+, 1}(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, -x_2)$, つまり $\tilde{\Psi}_{+, 1} = g$ である .

また , $x_0 \leq 0$ をみたく $(x_0, x_1, x_2) \in S^2$ に対しても同様に , $(-1, 0, 0)$ と (x_0, x_1, x_2) を結ぶ道 $\rho_{(x_0, x_1, x_2), -}$ を用いて , $\tilde{\Psi}_-((x_0, x_1, x_2), t) := \tilde{\rho}_{t, (x_0, x_1, x_2), -}(1)$ と定める . ただし , $\tilde{\rho}_{t, (x_0, x_1, x_2), -}$ は $p \circ \tilde{\rho}_{t, (x_0, x_1, x_2), -} = \Psi_t \circ p \circ \rho_{(x_0, x_1, x_2), -}$, $\tilde{\rho}_{t, (x_0, x_1, x_2), -}(0) = (-1, 0, 0)$ をみたすものである . ここで , $x_0 \leq 0$ のとき $\tilde{\Psi}_-((x_0, x_1, x_2), t) = -\tilde{\Psi}_+((-x_0, -x_1, -x_2), t)$ であることに注意しておこう . これは

$$\begin{aligned}
& p\left(-\tilde{\Psi}_+((-x_0, -x_1, -x_2), t)\right) \\
&= p\left(\tilde{\Psi}_+((-x_0, -x_1, -x_2), t)\right) \\
&= p\left(\tilde{\rho}_{t, (-x_0, -x_1, -x_2), +}(1)\right) \\
&= \Psi_t\left(p\left(\rho_{(-x_0, -x_1, -x_2), +}(1)\right)\right) \\
&= \Psi_t\left(p((-x_0, -x_1, -x_2))\right) \\
&= \Psi_t([x_0 : x_1 : x_2])
\end{aligned}$$

より, $-\tilde{\Psi}_+((-x_0, -x_1, -x_2), t)$ と $\tilde{\Psi}_-((x_0, x_1, x_2), t)$ は, 同じ道の持ち上げで同じ始点を持つものの終点となっているからである. また, $\tilde{\Psi}_-$ も id_{S^2} と g を結ぶホモトピーである.

そして,

$$\tilde{\Psi}((x_0, x_1, x_2), t) := \begin{cases} \tilde{\Psi}_+((x_0, x_1, x_2), t) & (x_0 \geq 0 \text{ のとき}) \\ \tilde{\Psi}_-((x_0, x_1, x_2), t) & (x_0 \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める.

この写像 $\tilde{\Psi}$ が矛盾なく定義されていることを確認しよう. そのためには, $(0, x_1, x_2) \in S^2$ 上で 2 つの定義が一致していることを示せばよい. 上の注意により, $\tilde{\Psi}_-((0, x_1, x_2), t) = -\tilde{\Psi}_+((0, -x_1, -x_2), t)$ である. よって, $\tilde{\Psi}_+((0, x_1, x_2), t) = -\tilde{\Psi}_+((0, -x_1, -x_2), t)$ であることを示せばよい. $\mathbb{R}P^2$ 内の道 $\Psi_t \circ p \circ \rho_{(0, x_1, x_2), +}$, $\Psi_t \circ p \circ \rho_{(0, -x_1, -x_2), +}$ はともに $[1 : 0 : 0]$ を始点とし, $[0 : x_1 : x_2]$ を終点とする. この 2 つはホモトピックでないことを示そう. 閉道 $p \circ \rho_{(0, x_1, x_2), +} * (p \circ \rho_{(0, -x_1, -x_2), +})^{-1}$ は $H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元であるから (例 6.2.2 参照), 単位元ではない (確認). また, Ψ_t は id とホモトピックであるから, 定理 8.1.3 より閉道 $\Psi_t \circ p \circ \rho_{(0, x_1, x_2), +} * (\Psi_t \circ p \circ \rho_{(0, -x_1, -x_2), +})^{-1}$ の表す $H_1(\mathbb{R}P^2)$ の元も単位元ではない. 定理 7.4.1 より, この閉道は基本群 $\pi_1(\mathbb{R}P^2, [1 : 0 : 0])$ の元としても単位元ではない. つまり, 2 つの道 $\Psi_t \circ p \circ \rho_{(0, x_1, x_2), +}$, $\Psi_t \circ p \circ \rho_{(0, -x_1, -x_2), +}$ はホモトピックではないことになり, 道の持ち上げのホモトピー不変性 (補題 9.1.4) より, この 2 つの道の持ち上げの終点は異なっている (厳密に言うと, S^2 は $\mathbb{R}P^2$ の普遍被覆空間だから, 道のホモトピー類と, その持ち上げの終点は一対一に対応するからである.) よって, $\tilde{\Psi}_+((0, x_1, x_2), t)$ と $\tilde{\Psi}_+((0, -x_1, -x_2), t)$ は, p で射影すると同じだが, S^2 の点としては異なっている. つまり $\tilde{\Psi}_+((0, x_1, x_2), t)$ は $-\tilde{\Psi}_+((0, -x_1, -x_2), t)$ と一致する.

$\tilde{\Psi}$ は id と g を結ぶホモトピーであるから (確認), g と id は $H_1(S^2)$ 上で同じ準同型写像を誘導する (定理 8.1.3). ところが, $g_*: H_1(S^2) \rightarrow H_1(S^2)$ は, 生成元の符号を変える写像 (球面を裏返している) であり, $\text{id}_{S^2, *}$ とは異なっている. よって矛盾が導かれた.

(8.11). X は, 演習問題 8.8 で定義された f の写像錐 C_f である (確認).

まず, X のホモロジー群を求めよう. 解答 8.8 の (B.8) より, 次の完全系列が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_q(S^1) & \xrightarrow{f_*} & H_q(T^2) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X) \\
& & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \cdots \\
& & & & H_{q-1}(S^1) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

T^2 は円環面であるから, 例 4.5.5 より $H_2(T^2) = H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_q(T^2) = \{0\}$ ($q > 2$) である. これらの空間がすべて連結であることから,

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_*} H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X) \rightarrow \{0\}$$

が得られる. ここで, $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を a , $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の生成元を $\{m, l\}$ とすると, f の定義より $f_*(a) = 4m + 6l$ である (確認). よって, f_* は単射であり $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$ がわかる (確認). また,

$$\begin{aligned} H_1(X) &\cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{Im}(f_*) \\ &= \langle \langle m, l \mid 4m + 6l \rangle \rangle \\ &\quad (x := 2m + 3l, y := m + l \text{ とおく}) \\ &= \langle \langle x, y \mid 2x \rangle \rangle \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

となる (確認).

次に, $\pi_1(X)$ を求めよう. 解答 8.8 より $X \cong Z_f \cup C(S^1)$, $Z_f \cap C(S^1) = S^1$ である (Z_f は f の写像柱). また, $Z_f \sim T^2$ より $\pi_1(Z_f) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle \eta, \zeta \mid \eta\zeta = \zeta\eta \rangle$ がわかる (例 7.5.3 参照). そこで, 解答 8.9 と同様に, ファン・カンペンの定理を用いると

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \langle \pi_1(Z_f) \text{ の生成元}, \pi_1(C(S^1)) \text{ の生成元} \mid \\ &\quad \pi_1(Z_f) \text{ の関係式}, \pi_1(C(S^1)) \text{ の関係式}, \\ &\quad \pi_1(Z_f \cap C(S^1)) \text{ の関係式を } \pi_1(Z_f) \text{ の元とみなしたものの} \\ &= \pi_1(Z_f \cap C(S^1)) \text{ の関係式を } \pi_1(C(S^1)) \text{ の元とみなしたものの} \rangle \\ &= \langle \eta, \zeta \mid \eta\zeta = \zeta\eta, \eta^4\zeta^6 = 1 \rangle \\ &\cong \langle \langle \eta^{\text{Abel}}, \zeta^{\text{Abel}} \mid 4\eta^{\text{Abel}} + 6\zeta^{\text{Abel}} \rangle \rangle \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

となり, $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ がわかった ($\pi_1(X) \cong H_1(X)$ になる.)

(8.12). X は, 図 B.24 の上面の正方形 ABCD と下面の正方形 HEFG を, 右面の正方形 AEFB と左面の正方形 CDHG を, 前面の正方形 ADHE と後面の正方形 FBCG をそれぞれ貼り合わせたものである (確認). つまり, X は, 立方体の対面同士を左に 90 度回転させて貼り付けることにより得られる.

$[-1, 1]^3$ の表面 $\partial([-1, 1]^3)$ の, 同値関係 \sim による商空間を Y , $[-1, 1]^3$ の稜の \sim による商空間を Z とおく. Z は, 図 B.25 に現れる 4 種類の矢印を貼り合わせて得られる (確認). つまり, Z は 2 つの点 (と) をつなぐ 4 本の辺 a, b, c, d でできた空間である. マイヤー ビートリス完全系列を使うと ($a \cup b$ は円周と同相, それに c, d を順次付け加えればよい. 演習問題 8.4 参照) $H_0(Z) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(Z) \cong \mathbb{Z}^3$, $H_q(Z) = \{0\}$ ($q \neq 0, 1$) がわかる. ただし, $H_1(Z) \cong \mathbb{Z}^3$ は $\alpha := a - b$, $\beta := b - c$, $\gamma := c - d$ で生成されている (確認). ここで, a, b, c, d は図 B.25 の

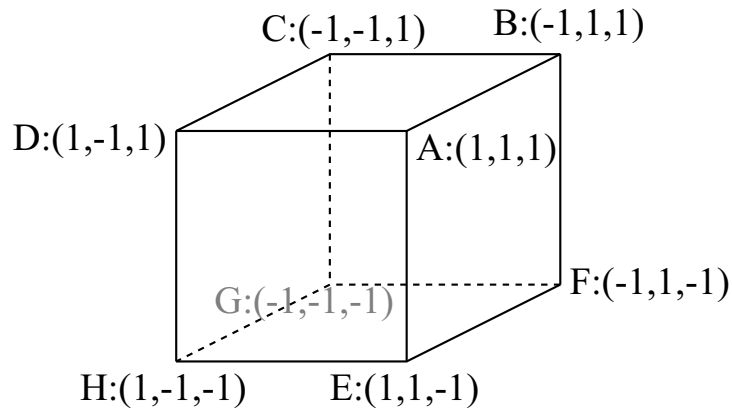


図 B.24 $[-1, 1]^3$

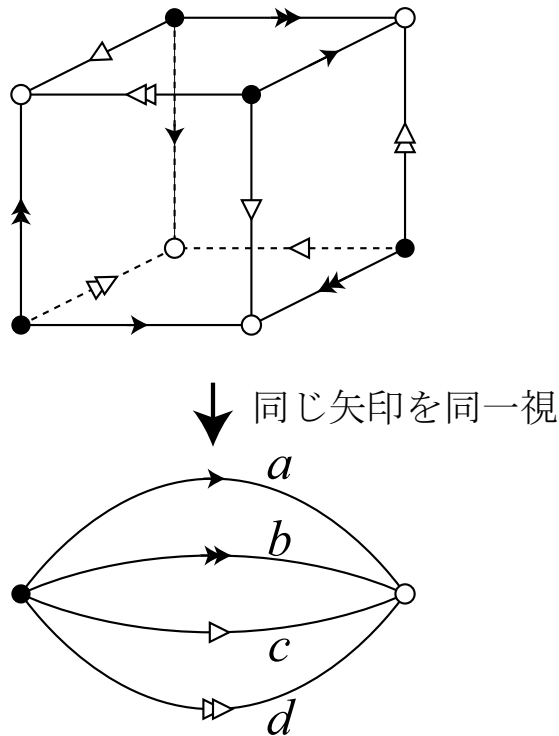


図 B.25 $[-1, 1]^3$ の稜を同一視

ように向きが付いているとする。Y は、Z に 3 枚の正方形（立方体の上面，右面，前面に対応している）を

- 上面を $a - b + c - d$ に沿って，
- 右面を $c - b + d - a$ に沿って，

• 前面を $d - b + a - c$ に沿って

それぞれ貼り付けたものである。つまり、 $Y \cong ((Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}) \cup \text{前面}$ である。ここで、 $Z \cup \text{上面}$ は、上面の周（円周と同相）から Z への貼り付け写像の写像錐（演習問題 8.8 参照）とみなすことができる（確認）。

よって、演習問題 8.8(B.8) より次の完全系列が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(\text{上面の周}) & \xrightarrow{f_{1*}} & H_q(Z) & \longrightarrow & H_q(Z \cup \text{上面}) \\ & & & & & & \\ & & \longrightarrow & H_{q-1}(\text{上面の周}) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

ここで f_1 は貼り付け写像である。これから

$$\{0\} \rightarrow H_2(Z \cup \text{上面}) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_{1*}} \mathbb{Z}^3 \rightarrow H_1(Z \cup \text{上面}) \rightarrow \{0\}$$

が得られる。ここで、 f_{1*} は $H_1(\text{上面の周}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を $a - b + c - d = \alpha + \gamma \in H_1(\mathbb{Z})$ に移すので、 $H_2(Z \cup \text{上面}) = \{0\}$,

$$H_1(Z \cup \text{上面}) = \langle \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha + \gamma \rangle \rangle \cong \langle \langle \alpha, \beta \mid - \rangle \rangle \cong \mathbb{Z}^2$$

となる（確認）。

同様に、 $(Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}$ を写像錐とみなすことにより、

$$\{0\} \rightarrow H_2((Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_{2*}} \mathbb{Z}^2 \rightarrow H_1((Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}) \rightarrow \{0\}$$

が得られる。ただし、 f_{2*} は $H_1(\text{右面の周}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を $c - b + d - a = -\alpha - 2\beta - \gamma = -2\beta \in H_1((Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}) = \langle \langle \alpha, \beta \mid - \rangle \rangle$ に移す。よって、 $H_2((Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}) = \{0\}$,

$$H_1((Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}) = \langle \langle \alpha, \beta \mid 2\beta \rangle \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となる。

最後に $Y \cong ((Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}) \cup \text{前面}$ を写像錐とみなすことにより、

$$\{0\} \rightarrow H_2(Y) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_{3*}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H_1(Y) \rightarrow \{0\}$$

が得られる。ただし、 f_{3*} は $H_1(\text{前面}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を $d - b + a - c = \alpha - \gamma = 2\alpha \in H_1((Z \cup \text{上面}) \cup \text{右面}) = \langle \langle \alpha, \beta \mid 2\beta \rangle \rangle$ に移す。よって、 $H_2(Y) = \{0\}$ であり

$$H_1(Y) = \langle \langle \alpha, \beta \mid 2\alpha, 2\beta \rangle \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

がわかった。さて、 X のホモロジー群の計算に戻ろう。 $[-1, 1]^3$ の中の小さな立方体 $J := [-1/2, 1/2]$ を考える。 J は X の部分空間ともみなせることに注意し $W := X \setminus \text{Int}(J)$ とおくと $X = W \cup J$, $W \cap J = \partial(J)$ である ($\partial(J)$ は J の表面)。

W を“薄く”する (J の各点を $[-1, 1]^3$ の方に近付ける) 変形により W は Y とホモトピー同値になることがわかる（確認）。よって、マイヤー ビートリス完全系列より

$$\begin{array}{ccccccc} & & \{0\} & \longrightarrow & H_3(X) & & \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & H_2(\partial(J)) & \longrightarrow & H_2(J) \oplus H_2(W) & \longrightarrow & H_2(X) & \\ \longrightarrow & H_1(\partial(J)) & \longrightarrow & H_1(J) \oplus H_1(W) & \longrightarrow & H_1(X) & \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

が得られる（現れる空間はすべて弧状連結であることを使っている）． $J \cong S^3$, $\partial(J) \cong S^2$, $W \sim Y$ を使うと，上の完全系列は

$$\begin{aligned} \{0\} \rightarrow H_3(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \{0\} \rightarrow H_2(X) \rightarrow \{0\} \\ \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X) \rightarrow \{0\} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 3 \text{ のとき} \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & q = 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}$$

がわかる．

注意 B.0.24. 演習問題 8.12 と同様に，正 12 面体の対面を $\pi/5$ 回転で同一視して得られる空間のことを正 12 面体空間と言う（図 B.26 参照）．実は，この空間は例 8.2.15 で構成した空間と同相

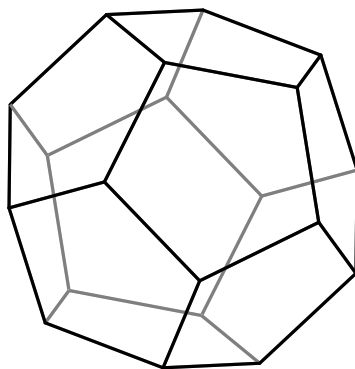


図 B.26 正 12 面体（MAPLE 6 を使って描いた）

であることがわかる（[1] 参照．この本にはもっと別の構成法がいくつか紹介されている）．

また，この構成法による基本群の計算は，[4] にも書かれている．

(8.13).

$$\mathbb{R}_{13} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3 = 0\},$$

$$\mathbb{R}_{14} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4 = 0\},$$

$$\mathbb{R}_{23} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_3 = 0\},$$

$$\mathbb{R}_{24} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_4 = 0\},$$

とおくと，これらはすべて \mathbb{R}^4 内の平面であり，

$$X = \mathbb{R}_{13} \cup \mathbb{R}_{14} \cup \mathbb{R}_{23} \cup \mathbb{R}_{24}$$

である . また ,

$$X_{13} := S^3 \cap \mathbb{R}_{13} = \{(x_2, x_4) \in \mathbb{R}_{13} \mid x_2^2 + x_4^2 = 1\},$$

$$X_{14} := S^3 \cap \mathbb{R}_{14} = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}_{14} \mid x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

$$X_{23} := S^3 \cap \mathbb{R}_{23} = \{(x_1, x_4) \in \mathbb{R}_{23} \mid x_1^2 + x_4^2 = 1\},$$

$$X_{24} := S^3 \cap \mathbb{R}_{24} = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}_{24} \mid x_1^2 + x_3^2 = 1\}$$

とおくと , これらはすべて円周と同相であり $X \cap S^3 = X_{13} \cup X_{14} \cup X_{23} \cup X_{24}$ となる .

$$X_{13} \cap X_{14} = \{(0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 0)\},$$

$$X_{13} \cap X_{23} = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\},$$

$$X_{13} \cap X_{24} = \emptyset,$$

$$X_{14} \cap X_{23} = \emptyset,$$

$$X_{14} \cap X_{24} = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0)\},$$

$$X_{23} \cap X_{24} = \{(1, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0)\}$$

であるから , $X \cap S^3$ は図 B.27 のようになる . この単体分割は , たとえば図 B.28 のようにとれ

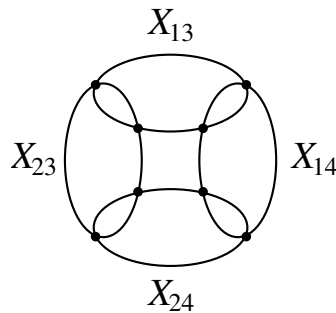


図 B.27 $X \cap S^3$

ばよい .

さて , $X \setminus \{0\}$ は $X \cap S^3$ とホモトピー同値であることが次のようにしてわかる .

$\Phi: X \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow X \setminus \{0\}$ を

$$\Phi((x_1, x_2, x_3, x_4), t) := \frac{1}{t\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} + 1 - t}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

で定義すると , $\Phi_0 = \text{id}_{X \setminus \{0\}}$ である . また , $r := \Phi_1$ は $X \setminus \{0\}$ から $X \cap S^3$ への写像とみなせ , $r \circ \text{id}_{X \cap S^3} = \text{id}_{X \cap S^3}$ であるから $X \cap S^3$ は $X \setminus \{0\}$ の変位レトラクトになる .

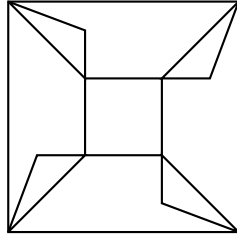


図 B.28 $X \cap S^3$ の単体分割の例

よって, $X \setminus \{0\}$ のホモロジー群は $X \cap S^3$ のホモロジー群と同型となる. 図 B.28 より, $X \cap S^3$ は S^1 に辺を 8 本付け加えたものになっているので, マイヤー ビートリス完全系列より (演習問題 8.4 参照)

$$H_q(X \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}^9 & q = 1 \text{ のとき} \\ \{0\} & q \neq 0, 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる (確認).