

特集 / 量子力学とカオス

量子力学における線形性と非線形性

量子ダイナミクスのフレーム

中 村 勝 弘

1. はじめに

現代物理学のキーワードであるソリトン（孤立波の安定な伝播）、カオス（初期値に敏感な時空パターン）、フラクタル（自己相似な時系列）などの非線形ダイナミクスは、マクロな古典論の世界で現れ、ニュートンの法則（一般的には、古典場に対する非線形波動方程式）により記述される。例えば、図 1 はソリトン集団の興味深い描像である。

ところで、ミクロな量子論の世界では、非線形ダイナミクスは生じないとされている¹⁾。実際、ミクロな量子論の世界の基礎方程式であるシュレー

ディンガー方程式を適用して量子ダイナミクスを考察してみよう。すると、電子の波束は、位相速度が波数により異なる（つまり、分散性の）ために孤立波になりえずあつという間に崩壊する。波動関数の初期パターンは初期値に敏感な時空パターンになりえず、周期的あるいは擬似周期的時間発展を示すだけである。適切な表示（コヒーレント表示、伏見表示など）を採用してやると、プランク定数で決まる短い crossover time (t_c) までは、電子の波束のダイナミクスは、確かに古典カオスの振舞いを模倣することができる。しかし、時刻 t_c 以降はやはり周期的あるいは擬似周期的時間発展を示すだけである。定常状態（エネルギー・スペクトル、波動関数）の解析にすばらしい成功をおさめている量子力学も、古典カオスを示す系の量子ダイナミクスに関しては、まことに trivial な結果しかもたらさない。これらのがっかりさせる結論はシュレーディンガー方程式の線形性により引き起こされる²⁾。ミクロな量子論の世界には本当に、ソリトン、カオス、フラクタルなどの非線形のダイナミクスは期待できないのだろうか？

最近「量子カオス」という研究分野が展開し、ノーベル・シンポジウムまで開催されるようになってきた。しかし、量子カオスの研究は、現在までのところ、古典力学で扱ったカオスを示す系を量子化するとどのような興味深いことが得られるのかと



図 1 ソリトン集団の概念図（数理科学 1995 年 9 月号の表紙より）。