May 2006 MATHEMATICAL SCIENCES Number 515

特集／数学と物理の対話

現代物理学のことば

経路積分という表象

渡 辺 浩

「宇宙という書物は数学の言葉で書かれている」という Galilei の有名な断章は，その前後を補って訳すと次のようになる．「我々の眼前に横たわるあの偉大な書物—即ち宇宙—には哲学が記されている．しかし，まず言葉を学び，表象を把握しなければ，それを理解することはできない．この書物は数学の言葉で書かれており，表象とは三角形や円のような幾何学図形であって，これらの助けがなければ，一語たりとも解することはできず，闇の迷宮のなかで虚しくさまようばかりである．」

人は，隠喩に満ちた宇宙という書物を読み解きながら，幼児が次第に言葉と文字を憶えるように，より洗練された数学を習得し，新たな表象を理解するようになった．

さて，この書物の‘現代物理学の章’にはまだ読み解かれていない部分が多く残されている．本特集のテーマは，いわば，解き明かされつつあるいくつかの物語と，その伏線となったエピソードの紹介である．そしてこの小文の目的は，現代物理学にしばしば現れる「経路積分」という‘表象’の解説を軸に，現代物理学の２つの柱である「量子論」と「統計力学」の数学的形式を比較しながら，鍵となる概念のいくつかをレビューすることである．このとき，虚数 i が象徴的な働きをする．

1. 複素数の物理

自然を記述する物理学において，複素数が単なる便宜としてではなく本質的に必要になったのは，量子論が最初であろう．点 $x \in \mathbb{R}^3$ におけるポテンシャルエネルギーが $V(x)$ で与えられる環境に質量 m の粒子を置く．この粒子に対する Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = \sum_{\mu=1}^{3}\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^2\psi(t,x) + V(x)\psi(t,x) \quad (1)$$

の解 $\psi(t,x)$ は複素数値関数であり，その絶対値の２乗 $|\psi(t,x)|^2$ は粒子の存在確率密度を与える．これを量子力学の**確率解釈**と言い，量子力学という数学的形式の物理的意味を規定する基本原理として位置付けられている．$\psi(t,x)$ を**確率振幅**と言う．

ここで注意したいのは，確率振幅を

$$\psi(t,x) = |\psi(t,x)|e^{i\phi(t,x)} \quad (2)$$

と書くとき，**位相** ϕ は物理的に観測可能な量ではないということである．物理学が直接の観測にかからない自由度を本質的に必要とするようになったのは，やはり量子論が最初であろう．