ギリシャ文字の読み方

A	α	アルファ	I	ι	イオタ	P	ρ	ロー
B	β	ベータ	K	κ	カッパ	Σ	σ	シグマ
Γ	γ	ガンマ	Λ	λ	ラムダ	T	τ	タウ
Δ	δ	デルタ	M	μ	ミュー	Υ	υ	ウプシロン
E	$\varepsilon\,\epsilon$	イプシロン	N	ν	ニュー	Φ	$\phi\,\varphi$	ファイ
Z	ζ	ツェータ	Ξ	ξ	クシー	X	χ	カイ
H	η	エータ	O	o	オミクロン	Ψ	ψ	プサイ
Θ	θ	シータ	Π	π	パイ	Ω	ω	オメガ

力学関係の物理定数，等

真空中の光速度	$c_0 = 2.99792458$	$\times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
万有引力定数	$G = 6.67259$	$\times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$
重力加速度 (東京)	$g = 9.7979$	$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$
地球質量	$M = 5.977$	$\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
地球半径 (赤道)	$R = 6.378$	$\times 10^{6}\,\mathrm{m}$
太陽質量	$M_S = 1.991$	$\times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
太陽地球間距離	$R_S = 1.496$	$\times 10^{11}\,\mathrm{m}$
π (円周率) $= 3.14159265$		
e (自然対数の底) $= 2.7182818$		

力学関係の SI 組立単位

量	単位	他の単位との関係
振動数	Hz (ヘルツ)	$\mathrm{s^{-1}}$
力	N (ニュートン)	$\mathrm{m\cdot kg\cdot s^{-2}}$
圧力	Pa (パスカル)	$\mathrm{N\cdot m^{-2} = m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}}$
エネルギー	J (ジュール)	$\mathrm{N\cdot m = m^2\cdot kg\cdot s^{-2}}$
仕事率	W (ワット)	$\mathrm{J\cdot s^{-1} = m^2\cdot kg\cdot s^{-3}}$

1 運動

- 速度：$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$，　加速度：$\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$
- 2 次元極座標による運動の表現

  位置ベクトル：$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$，　速度ベクトル：$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$

  加速度ベクトル：$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$
- 接線ベクトル $\boldsymbol{e}_t$ と法線ベクトル $\boldsymbol{e}_n$ による運動の表現

  速度ベクトル：$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t$，　$v = \dfrac{ds}{dt}$，　加速度ベクトル：$\boldsymbol{a} = \dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t - \dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$
- ベクトル積 (外積)：

  $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}$　($\boldsymbol{e}$ は，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に垂直な単位ベクトル)

  $\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$，　$\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x$，　$\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y$

  $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$

  $\boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B}$ (平行) のとき，　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$　(大きさ 0 のベクトル)

  $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$，　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$

  $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ のときは，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$，あるいは $\boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B}$.
- ベクトルの微分：$\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \dfrac{dA_x}{dt}\boldsymbol{e}_x + \dfrac{dA_y}{dt}\boldsymbol{e}_y + \dfrac{dA_z}{dt}\boldsymbol{e}_z$

  $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$，　$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$
- 近似式 ($|x| \ll 1$ のときに成り立つ)

  $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots$

  とくに $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \cdots$，　$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$

  $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \cdots$，　$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots$

  $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots$，　$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots$，　$\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \cdots$

2 運動量保存則と力

質量を m，速度を $\boldsymbol{v}$，力を $\boldsymbol{f}$，微小時間を Δt とする．

- 運動量：$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$
- 運動エネルギー：$K = \dfrac{1}{2}mv^2$
- 力積：$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{f}\Delta t$
- 運動の第 2 法則：$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$

  とくに質量 m が時間的に不変ならば $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$　($\boldsymbol{a}$ は加速度)

よく使う基本公式はココ
さいごのページにもあります。

問 題 解 答

ポイントを絞った基礎事項

問題に取り組む前にここで学ぶ事項の復習.
必要なことだけコンパクトにまとめられているから効率良く学べる

コラム一覧

1 運　　動

1.1 ベクトルによる運動の表現

• ベクトル •　重さや長さのように大きさだけで計られる量に対して，力や速度は方向や向きもあわせて指定しなければならない．このような量は一般にベクトルとよばれ，力学において重要な役割を演ずる．いま，1 つのベクトルを $\boldsymbol{A}$ とすると，それは矢印 (図 1.1) で表わされる．2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ はいわゆる平行四辺形の法則によって求められる (図 1.2)．多数のベクトルの和は図 1.3 のようにして求めるのが便利である．ベクトルについてはつぎの演算規則が成り立つ (λ は任意の実数)：

図1.1

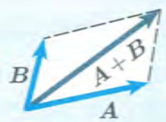

図1.2

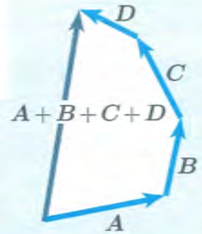

図1.3

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C},$$
$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}.$$

• 単位ベクトルと座標系 •　長さ 1 のベクトルを単位ベクトルとよぶ．3 次元空間での任意のベクトルは適当に選ばれた 3 つの単位ベクトルの線形結合によって表現される．すなわち任意のベクトルを $\boldsymbol{A}$，3 つの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ と書くとき，$\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$$

のように表わされる．ここで $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は基本ベクトル系，A_1, A_2, A_3 はその基本ベクトル系での成分とよばれる．

上に述べた基本ベクトル系の選びかたは座標系の選びかたに対応する．本書でしばしば用いる 3 つの最も基本的な直交座標系 —— 直角座標系，2 次元極座標系，3 次元極座標系 —— について以下に述べよう．

まずは復習

例題 1　**極座標による速度の表現**

2次元の速度を極座標系 (r, θ) の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_r \boldsymbol{e}_r + v_\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

と書いたときの v_r, v_θ を求めよ．

解答　**解法 1**　p.4 の **注意 3** から，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y.$$

と表わすと速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y. \qquad (1)$$

ただし，文字の上につけた点 ($\dot{}$) は時間微分を表わす．(1) から

$$\begin{aligned} v_r &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_r = \dot{x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_r) + \dot{y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_r) \\ &= \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta, \qquad (2) \\ v_\theta &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\theta = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta. \qquad (3) \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_r = \cos\theta$ などの関係式を用いた．あとは (2) と (3) の中の x, y を r, θ で書き直せばよい．すなわち

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

から

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta.$$

上式を (2), (3) に代入して

$$\begin{cases} v_r = \dot{r}, \\ v_\theta = r\dot{\theta}. \end{cases} \qquad (4)$$

解法 2　解法 1 においてはまず直角座標系での速度ベクトルの表示を求め，そののち極座標系へ移行した．ここでは極座標系における単位ベクトルの時間変化を考慮して解を求めてみよう．$\boldsymbol{e}_r$ を用いると，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

と書けるから，

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r. \qquad (5)$$

ここで $\dot{\boldsymbol{e}}_r \neq \boldsymbol{0}$ であることが重要である (次頁の **注意 2** 参照).

つぎに $\dot{\boldsymbol{e}}_r$ すなわち $\boldsymbol{e}_r$ の時間的変化率を考えよう．$\boldsymbol{e}_r$ は動径 $\boldsymbol{r}$ の方向の単位ベクトルであるから，その大きさは $|\boldsymbol{e}_r| = 1$ で一定であるが，向きは $\boldsymbol{r}$ の方向，すなわち θ

基本的な例題と
ていねいな解答から問題へ
まずは問題にチャレンジして
できる！わかる！を実感しよう
解答は一通りではないことも．
次にここで学んだ解法をまねて下に
ある問題を解き確実に自分のものにしよう！

$$\begin{cases} v_r = \dot{r}, \\ v_\theta = r\dot{\theta}. \end{cases}$$

注意 1　解法 1, 2 を比べたとき，(8), (9) のような公式を導いておけば，後者の方が計算が楽であり，見通しもよい．

注意 2　直角座標系では単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ によらず一定であるが，極座標系では $\boldsymbol{r}$ の変化とともに単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ の方向が変わる．このため $\dot{\boldsymbol{e}}_r \neq \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r$ とはならないことに十分注意されたい．また，(9) の $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ は，ここでは用いなかったがあとのために導いておいた．

問　題

1.1　2次元平面上の点が，$r = at$, $\theta = bt$ と表わせるような運動をするとき，v_r, v_θ, v_x, v_y を求めよ．

1.2　3次元極座標系 (r, θ, φ) での速度を

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

と書いたときの v_r, v_θ, v_φ を求めよ．

ヒント　$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ と $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ の間の関係 (p.3 の表) を用いよ．

2　運動量保存則と力

• 力と運動量 •　静止した物体に何らかの力を加えて運動をおこさせたとしよう．物体の質量が非常に大きければその物体はほとんど動かないであろうし，反対に小さければ物体は大きな速度を得るであろう．このように，力によっておこされる運動の大きさは，物体の質量に密接に関連している．

質量 m の物体が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとき，

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

によって定義されるベクトル $\boldsymbol{p}$ を運動量とよぶ．上に述べたことを $\boldsymbol{p}$ を用いていうと，力の作用によって物体は運動量 $\boldsymbol{0}$ (静止) の状態から運動量 $\boldsymbol{p}$ の状態に変化したのである．

• 運動の第 2 法則 •　力と運動量の変化とを結びつける法則が運動の第 2 法則であって，"物体の運動量の時間変化の速さはその物体に働く力に等しい" と述べることができる．物体に働く力を $\boldsymbol{f}$ として，このことを式で表わすと

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f} \tag{1}$$

となる．もし運動中に質量 m が変化しなければ，第 2 法則は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{2}$$

と書くことができる．すなわち，物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は力 $\boldsymbol{f}$ に比例することになる．第 2 法則を (2) の形に書き表わすことが多いが，質量が変化するばあいにはそのようには書けないから注意を要する．

• 運動量保存則 •　物体に力が働いていないばあい ($\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ のとき) には，(1) によって $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ は時間的に一定に保たれる．これを**運動量保存則**という．すなわち，力が働かないときには，質量が一定の物体は，静止したままであるか，等速直線運動を続けるかのどちらかである (**慣性の法則あるいは運動の第 1 法則**)．

運動量保存則は，1 個の物体だけでなく，複数個の物体全体に対しても成り立つきわめて基本的な法則である．すなわち，外部から力を受けていない複数個の物体の運動量は，それらの物体のあいだでは互いに力を及ぼし合っていたとしても，総和はかならず一定に保たれる．

• 作用と反作用 •　物体 A が物体 B に力を及ぼすとき，物体 A は物体 B から大きさが等しく反対向きの力を受ける (**作用・反作用の法則あるいは運動の第 3 法則**)．壁を手で押すとき，手は壁から押しかえされることを思い浮かべればよい．

• 運動エネルギー •　質量 m の物体が速さ v で運動しているとき，その物体は

2章で「運動量保存則と力」が登場
本書の特色のひとつ
保存則の重要性と有用性を
早めに身につけよう!!

なお，動摩擦力が伴う現象では，摩擦によって熱が発生する (運動エネルギーが内部エネルギーに変わる) ために，その分の運動エネルギーは時間的に減少していく．

また，衝撃を伴う現象においても，物体内部でおこる摩擦が原因で，運動エネルギーは減少することが多い．しかし，たとえば爆発のように，もともと物体がもっていた内部エネルギー (化学結合のエネルギー) が解放されて物体各部の運動エネルギーに変わるということもある．

• 撃力と力積 •　衝突や打撃のような極めて短時間だけ働く強い力を撃力とよぶ．一般に力 $\boldsymbol{f}$ が短時間 Δt だけ働いたとき，

$$\boldsymbol{f}\Delta t$$

をその力の**力積** (ベクトル) とよぶ．それを受けた物体の運動量変化 $\Delta\boldsymbol{p}$ は，(1) によって $\boldsymbol{f}\Delta t$ に等しいとみなすことができる．物体が受けた衝撃の大小の度合いは，力 $\boldsymbol{f}$ そのものよりも，力積 $\boldsymbol{f}\Delta t$ で表わすのが適切である．

例題 1　　　　　　　　　　　　　　**放物運動**

水平面と β の角をなす斜面の最下点から斜面と α をなす方向に初速 v_0 で物体を投げた．斜面上の最大到達距離を得るための角 α を求めよ．

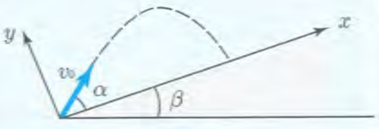

図3.5

ヒント　図 3.5 のように x, y 座標を選び，重力が x, y 両成分をもつことに注意する．

解答　物体の質量を m とする．重力を斜面に沿う方向と垂直な方向とに分解すると図 3.6 のようになる．そこで，物体に対する運動方程式は

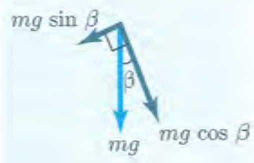

図3.6

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\beta, \tag{1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\cos\beta. \tag{2}$$

初期条件は，$t = 0$ で，

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha, \tag{3}$$

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha. \tag{4}$$

(1) と (2) を積分すれば

$$x = -\frac{1}{2}gt^2\sin\beta + C_1t + C_2, \tag{5}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2\cos\beta + C_3t + C_4. \tag{6}$$

(3) と (4) を用いて積分定数 C_1, C_2, C_3, C_4 を決定すると

$$x = -\frac{1}{2}gt^2\sin\beta + v_0t\cos\alpha, \tag{7}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2\cos\beta + v_0t\sin\alpha. \tag{8}$$

つぎに (7) と (8) を用いて物体の斜面上での到達距離 L を求めよう．到達点では $y = 0$ であるから，到達の時刻 t_1 は (8) により

$$t_1 = \frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\beta}. \tag{9}$$

(9) を (7) に代入すれば

$$L = \frac{2{v_0}^2}{g\cos^2\beta}\sin\alpha\,(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \frac{2{v_0}^2}{g\cos^2\beta}\sin\alpha\cos(\alpha+\beta). \tag{10}$$

(10) の最大値を得るために，さらに

$v_0{}^2$

と

の

そ

面

著者の思いは問題にあり！

最低限これだけは理解し，使いこなして欲しい！という想いから集めた良問中の良問とていねいな解説を見て下さい！

$$L = \frac{}{g}.$$

注意 1　いつでも $\alpha = \pi/4$ とするのがよいわけではないことは，$\beta = \pi/2$ のときを考えてみれば明らかであろう (このときは斜面に沿って鉛直上方に投げればよい)．

注意 2　L の最大値を得るとき (10) から (11) の変形をせず，(10) からただちに $\sin\alpha = 1$ または $\cos(\alpha+\beta) = 1$ として α を求めてはならない．また，(11) を α について微分したものを 0 とおけば (12) が得られることはいうまでもない．

注意 3　x 軸を水平方向，y 軸を鉛直上方に選び，物体の軌道を求め，さらに $y = x\tan\beta$ との交点を求めて，上の結果を確かめてみよ．

問　題

1.1　ボールを斜め上方に投げ上げたとき，その初速と角度を精密に測るのは少しむずかしい．そこでボールの到達距離と飛行時間からこれを求めたい．必要な公式を導け．

1.2　物体を投げたら，同一水平面上で，投げた点から距離 R のところまでとどいた．このとき物体のいちばん高く上がった高さは h であった．同じ初速でこの物体を投げたときの最大到達距離を R と h で表わせ．

まずは復習

基本的な例題

運動量保存則

良問中の良問

例題 22 — 鉛直並進加速度系

エレベーターの中でばね秤を用いて物体の重さを測る．つぎのばあいに目盛りはどのように変わるか：

(i) 一定速度で上昇または下降するとき．

(ii) 上向きに加速度 α をもつとき，および下向きに加速度 α をもつとき (ただし $\alpha > 0$ とする)．

(iii) エレベーターの綱が切れたとき．

解答 物体の質量を m，秤にかかる力を T とする．

(i) 物体の加速度は 0 であるから

$$0 = T - mg.$$

これから $T = mg$ である．すなわち目盛りは変わらない．

(ii) 運動方程式

$$m \cdot (\pm\alpha) = T - mg$$

から T を求めれば，

$$T = m(g \pm \alpha) = mg\left(1 \pm \frac{\alpha}{g}\right).$$

すなわち，加速度が上（下）向きのときは重（軽）くなる．

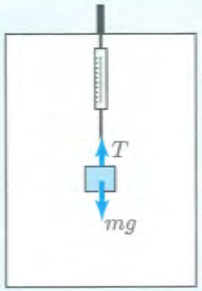

図3.42

わかりやすい図で
イメージしやすい
シンプルだけど要点が詰まった図で
学習を手助け！

)中では，
る．
)できる：
), (i) で
得られる．

問題

22.1 一定の加速度 α (> 0) で上昇するエレベーターの中で水平に石を投げると，石はどのような運動をするか．

22.2 上下に単振動している台がある．その周期は T，振幅は a である．この台の上においた質量 W の物体の，台に対する見かけの重さの最大値と最小値を求めよ．

例題 23 — 水平並進加速度系

一定加速度 α (> 0) で一直線上を水平に走っている電車の中で，その加速度の向きに初速 V_0 で物体を投げた．電車の中で見ると物体はどのような運動をするか．

解答 物体の質量を m とする．電車といっしょに動く系では，物体に働く力は，鉛直下向きの重力 $m\boldsymbol{g}$ と，電車の加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ と逆向きの慣性力 $-m\boldsymbol{\alpha}$ との合力，すなわち $m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\alpha})$ である．したがって，この系は，鉛直方向に対して傾いた方向に

$$\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\alpha}$$

という一様な重力場がある慣性系と同等であると考えることができる (図 3.43)．

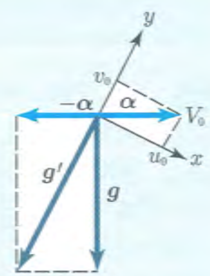

図3.43

そこで，ベクトル $\boldsymbol{g}'$ と逆向きに y 軸，それに垂直で電車の加速度と同じ側に x 軸をとったとすれば，物体は

$$\sqrt{g^2 + \alpha^2} = g\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{g^2}}$$

という大きさの重力場の中で，初速 (u_0, v_0)：

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2}{g^2}}} V_0, \\[2ex] v_0 = \dfrac{\dfrac{\alpha}{g}}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2}{g^2}}} V_0 \end{cases}$$

で投げ出された物体と同じ運動を行なう．すなわち，電車の中で見ると，物体は g' の方向に軸をもつ放物線の上を運動することになる (図 3.44)．

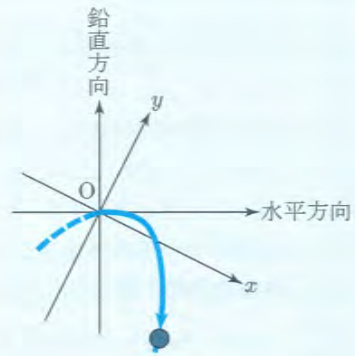

図3.44

問題

23.1 上の例題で，とくに $V_0 = 0$ のときは軌道はどうなるか．

23.2 $1\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ の加速度で一直線上を水平方向に走っている電車の中で静かにつるした振り子の，鉛直方向に対する傾き θ を求めよ．

コラムも満載

「回転ゆで卵の運動」の他、
力学に関するおもしろいコラムも満載

撃力を
どこか.
水平な
けの距

♣ 回転ゆで卵の運動　5.3節のうめくさで紹介された「逆立ちごま」のように，高速で回転すると重心が上昇する物体は様々あって，碁石やゆで卵もその例である．ゆで卵のばあい，その対称軸を水平にしてテーブルの上で速く回すと，その軸が徐々に鉛直方向に傾いていき，ついに卵が直立するのである．しかし，この現象は「逆立ちごま」の理論では説明できない．というのは，物体の形が球形ではないため，もはや保存量が存在しないからである．実は，この現象の理論的説明がなされたのは2002年である．高速で回転するばあい，任意の軸対称剛体に対して近似的にジェレット定数が保存量となることがわかり，回転ゆで卵が立ち上がる様子を表わす近似解析解が得られたのである．

さらに2005年，回転ゆで卵は立ち上がる途中で信じがたい運動をすることが理論的に予測された．卵がひとりでにテーブルとの接触を失い，微小なジャンプをするのである．この飛び跳ね現象は，上昇中のエレベーターが急に止まったとき体重が軽くなるのと同様の原理で起きるのであるが，2006年実験的にも検証され，理論の予測どおり写真にあるような微小なジャンプがいくつも確認された．

解明されていない身近な力学現象はまだまだ多い．

イメージ

6　解析力学

• 解析力学の意義 •　解析力学はニュートンの運動方程式とは別の原理を適用して力学の諸現象を研究する分野である．ただし，その原理はニュートンの力学と同等であって，片方から他方を導き出すことができる．解析力学を学習する意義はつぎのように要約できる：

(i)　ニュートンの運動方程式を使う方法の他に，解析力学を使う方法を知ることによって，力学の体系についての広い視野をもつことができる．

(ii)　ニュートンの運動方程式を使うよりも，解析力学を使う方が問題が解きやすいことがある．とくに，多くの物体が集合した系や，複雑な束縛条件がついている系ではそれがいちじるしい．

(iii)　原子や分子の世界は，ニュートン力学とはまったく別の法則にしたがう．それは量子力学とよばれ，形式の上で解析力学と似ている点がある．したがって，解析力学を知っておくと量子力学を学ぶときにも役立つ．しかしこの点に関しては，本書の範囲をこえるので以後はふれないことにする．

解析力学では，ラグランジュ関数やハミルトン関数とよばれる新しい関数を導入して運動方程式を書きかえる．ここではその要点のみを記すことにする．

• ラグランジュ関数とラグランジュの方程式 •　ポテンシャルエネルギー U の力の場の中を運動する質量 m の質点の運動方程式は，直角座標 (x_1, x_2, x_3) を使うと

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

と書くことができる．運動エネルギー K を用いて左辺を次のように書き直そう：

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i}\right), \quad K = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i{}^2 \tag{2}$$

K が x_i に，U が $\dot{x}_i$ に依存しないことに注意すると，(1) と (2) から (注意 1 参照)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad L = K - U. \tag{3}$$

L は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差で，ラグランジュ関数 (または

7 総合問題

例題 1 非弾性衝突のモデル

図 7.1 のように，ばね定数 k の軽いばねでつないだ質量 m の 2 つの球 (球 m とよぶ) に，質量 M の別の球 (球 M) がばねの延長線上から速さ V で飛んできて衝突する．球どうしは瞬間的に弾性衝突をする．衝突後，それぞれはどのような運動をするか．2 つの球 m を 1 つの物体とみなしたとき，それと球 M との間の反発係数 e を求めよ．

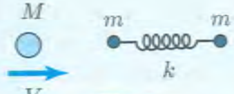

図7.1

ヒント 球 M と左の球 m の衝突は弾性的である．2 つの球 m はばねでつながっているが，衝突の瞬間にはばねはまだ縮んでいないから，右の球 m の速度は 0 である．このことから衝突直後のそれぞれの速度が決まる．そのあとの 2 つの球 m の系の運動量は，衝突直後に左の球がもっていた運動量に等しい (運動量保存則)．さらに，縮んだばねは復元力によってもとにもどろうとするから，球 m の系は，ばねが伸びたり縮んだりする振動を伴いながら右方へ運動する．この振動を調べるには，球 m の運動を，2 球の重心とともに動く座標系で見ればよい．反発係数 e は，重心の速度を使って計算できる．

解答 まず衝突直後の運動を調べよう．球 M と左の球 m の速度をそれぞれ V', v' とすると，運動量保存則および反発係数が 1 であることから

$$MV = MV' + mv', \quad \frac{v' - V'}{V} = 1.$$

これから

$$V' = \frac{M-m}{M+m}V, \quad v' = \frac{2M}{M+m}V. \tag{1}$$

2 つの球 m の重心の速度を v_G とすると，重心の定義によって

$$2mv_G = mv' \qquad \therefore \quad v_G = \frac{1}{2}v'. \tag{2}$$

運動量保存則によって，衝突ののち重心の速度はこの値を保ち続ける．

つぎに，ばねの伸び縮みの振動について調べよう．そのために，重心とともに右へ移動する座標系で球 m の運動を見ることにする．2 つの球 m は静止した重心の両側で振動している．右側の球 m の変位を x と書くと，ばねは $2x$ だけ伸びていることになるから，右側の球 m の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -2kx \tag{3}$$

となる．衝突の直後 ($t = 0$ とする) には，ばねは自然長であるから，$x = 0$ である．したがって，(3) の解は $x = a\sin\omega t$ (a と ω は定数) である．ただし，角振動数 ω は

総合問題で最終チェック！
物理的におもしろい問題を集めた
総合問題にチャレンジ！

2 つの球 m をひとかたまりの物体とみなしたときの球 M との間の反発係数は，このかたまりが速度 v_G で運動するものと考えて，つぎの式で与えられる：

$$e = \frac{v_G - V'}{V} = \frac{\frac{v'}{2} - V'}{V} = \frac{M}{M+m} - \frac{M-m}{M+m} = \frac{m}{M+m} \tag{6}$$

注意 一般に，反発係数が 1 より小さいときには，衝突に際して運動エネルギーが減少する．この例題では，2 つの球 m の系は，重心の移動という全体的な運動の他に，ばねの伸び縮みの運動をはじめるから，振動のエネルギーをもつようになる．すなわち，球 M がもっていた運動エネルギーの一部が，2 つの球 m の系の振動のエネルギーに変換されたわけである．並進運動のエネルギーが振動のエネルギーだけでなく，回転のエネルギーに変換されるばあいもある．下の問題 1.1 はその例である．

問題

1.1 質量 m の球から成る長さ l の 2 組の亜鈴が衝突する．衝突前は右の亜鈴は静止している．左の亜鈴は回転せずに重心が速度 V で近づく．そして左側の 1 つの球が右側の 1 つの球に弾性衝突する．また，両方の亜鈴はどちらも速度の方向に垂直であったとする．衝突後の両方の亜鈴の重心の速度と，回転角速度を求めよ．さらに，各亜鈴を 1 つの物体とみなしたときの反発係数を求めよ．

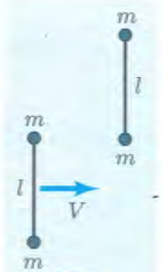

図7.2

例題 5　　　　**回転ノズルと角運動量**

図のような T 字型のパイプを角速度 ω でまわすと同時に，下から単位時間あたりに質量 M の水を送り込んで横に噴き出させる．角速度を一定値 ω に保つためには，たえずパイプに力のモーメントを加えていかなければならない．それはなぜか．パイプの片方の腕の長さを R として，このモーメントの大きさを求めよ．

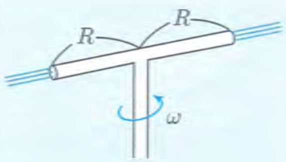

図7.6

解答　角速度 ω でまわるパイプから水が噴き出すとき，水も回転軸のまわりに角速度 ω でまわっている．すなわち，噴き出す水は角運動量をもっている．一方，回転軸に沿って送り込まれる水は角運動量をもっていない．したがって，水に角運動量を与えて一定の割合で放出し続けるためには，角運動量保存則によって，パイプは水に対して力のモーメント (偶力) を加えなければならない．そうすると，パイプはその反作用によって逆向きの力のモーメントを受け，回転が減速しようとする．それに逆らって一定の角速度を保たせるためには，外からパイプに対して力のモーメントを加えていなければならないことになる．

力のモーメントの大きさを求めるには，単位時間あたりに水が獲得する角運動量を計算すればよい．パイプの腕の長さを R とすれば，パイプの出口で水は回転方向に $R\omega$ の速度成分をもっている．したがって単位質量あたり $R^2\omega$ の角運動量をもっている．単位時間あたりに質量 M の水が放出されるのであるから，単位時間あたりに $MR^2\omega$ だけの角運動量が水に与えられることになる．これがパイプに加えるべき力のモーメントである．

問　題

5.1　図 7.7 のように，腕の長さが R で先端が 135° に曲がっている軽いパイプから水を放出する．外からパイプに力のモーメントを加えていないとき，パイプはどんな角速度でまわるか．ただし，パイプの断面積は S で，単位時間あたりに Q という体積の水を送り込むとする．

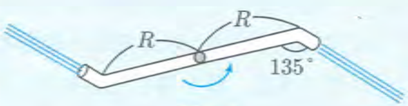

図7.7

5.2　図 7.8 のように，糸につけたおもりに糸と垂直な方向の初速を与えて，半径 a の細い棒にこの糸を巻きつけていく．おもりの角速度 $\omega = \omega(t)$ の満たすべき微分方程式を導け．ただし，重力の効果は考えないものとする．できたら，それを解け．

図7.8

イメージ　コラム　総合問題

問 題 解 答

第 1 章の解答

1.1　例題 1 の (4) から，

$$v_r = \dot r = a, \quad v_\theta = r\dot\theta = at\cdot b = abt.$$

(4) の上に示した式から，

$$v_x = \dot x = a\cos\theta - rb\sin\theta = a\cos bt - abt\sin bt,$$

$$v_y = \dot y = a\sin\theta + rb\cos\theta = a\sin bt + abt\cos bt.$$

詳しい解答

過程からまとめられた超詳しい解答だから
自習書に最適！
問題は必ず自分で解いてみてから
解答と比較してみよう

$$\boldsymbol{a} = \ddot r\boldsymbol{e}_r + \dot r\dot{\boldsymbol{e}}_r + \frac{d}{dt}(r\dot\theta)\boldsymbol{e}_\theta + r\dot\theta\dot{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{d}{dt}(r\sin\theta\dot\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi + r\sin\theta\dot\varphi\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi.$$

$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta$, $\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi$ を $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ で表わすために p.3 の表を使う ($\dot{\boldsymbol{e}}_r$ については問題 1.2 ですでに得られている)．$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta$ については同様に

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\dot\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi.$$

また

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -(\cos\varphi\cdot\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\cdot\boldsymbol{e}_y)\,\dot\varphi$$

となるが，p.3 の表から