June 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 540

特集／線形代数の力

線形代数小史

齋藤 正彦

解析学からはじめよう．オイラー（18世紀）は，定数係数の n 階斉次線形微分方程式の一般解が，適当にえらんだ n 個の特殊解の線形結合として書けることを証明した．《適当な》というのは，いまのことばを使えば《線形独立な》ということである．

その少しあと，ラグランジュはオイラーの結果を，必ずしも定数係数でない n 階斉次線形微分方程式の場合に一般化した．

これらの結果をいまのことばに直せば，n 階斉次線形微分方程式の解ぜんぶの集合が，解関数たちの加法とスカラー乗法によって，n 次元の実線形空間になる，ということである．

しかし，そのころ線形空間（ベクトル空間とも言う）の概念はなかった．ベクトルという概念もまだ《大きさと向きをもつ量》という物理学的なものであり，数ベクトルもなく，まして関数をベクトルとみなす発想はなかった．

実は公理による線形空間の定義は，線形代数史のほぼ最後にくるものであり，それは19世紀末のペアノまで待たなければならない．

つぎに幾何学について言えば，17世紀の前半にデカルトとフェルマが座標幾何（最近まで解析幾何と呼ばれていた）をはじめてから代数化がすすむ．平面上の2直線の交点（一般には共通点の全体）を求めることが，2×2 型の1次方程式系を解くことになる．空間内の3平面の共通点（の全体）を求めることが，3×3 型の1次方程式を解くことになる．

こうして幾何学からも線形代数がはじまる．いまでは n 次元ユークリッド空間は，n 次元の実線形空間に正値2次形式がついたものとして理解される．

線形代数は連立1次方程式を解くことからはじまる．n 個の未知数に関する m 元連立1次方程式を $m \times n$ 型の1次方程式系ということにすれば，当然まず 2×2 型である．つぎに 3×3 型にすすみ，さらに $n > 3$ の場合に一般化される．$m \neq n$ の場合の考察はおくれる．

1次方程式系を解くことから，自然な流れとして行列式の概念が導入される．

すでに17世紀に，ライプニッツは行列式の概念を得ていた．同じころ，関孝和も行列式を扱っていた．

行列式を使う1次方程式系の解法でもっとも重要なのは，有名なクラメールの公式だろう．18世紀なかばにクラメールは，$n \times n$ 型の場合のこの公式を発表したが，証明はついていなかった．

大学でも20世紀の前半までは，どの教科書にもほぼクラメールの公式だけが，1次方程式系の解法として出ていた．

必ずしも1次方程式系の解法と結びつかない，行列式固有の理論は，18世紀後半のヴァンデルモンド（ヴァンデルモンドの行列式）とラプラス（行列式の余因子によるラプラス展開）からはじまる．行列式論はコーシーによって大きく発展した．い