

特集／方程式に潜む対称性

世界の形，方程式の形

砂田 利一

1. 序

大学にいるものすべてが否応なく紛争^{*1)}に巻き込まれた時代，そんな異常な雰囲気の中で，数学科の友人たちと教室の片隅に座りながら，将来数学のどの分野に進むかを取りとめもなく話し合ったことがあった。皆が自分自身の未来像を考えあぐねて黙り込んでいたとき，突然ひとりが立ち上がり，偏微分方程式の研究者を目指していると力強く宣言した。理由はと聞くと，「ラプラス方程式がとても美しく見えるから」という。「そういう理由もあるのか」と，そのときは聞き流していたが，大学が平常に戻り，自分自身がラプラス作用素に関係する幾何学の研究に勤しむようになってから，この友人の言葉を度々思い出すこととなった。

そう，なぜラプラス方程式は美しいのか？なぜ，ラプラス作用素に拘るのか？ここでは，ラプラス作用素を一つの例として，物理学や数学に登場するいくつかの方程式の「美しさ」について独断的に語ろうと思う^{*2)}。

2. 世界の形から方程式の形へ

元々「対称」という用語は，ものの形を形容する言葉である。「対称な形は美しい」。非対称なものにも美を愛でる日本人としては，このような単純な美意識には異を唱えたいが，ここでは素直にそれを認めよう。

実は，「世界」を記述する方程式も，「世界」という一種の「形」の対称性に根ざしている。従って，世界が美しければ方程式も美しく，その逆も真である。例えば，ニュートン力学が支配する古典的な空間は，平坦でありかつ等質，等方的である。くだけた言い方をすれば，「平らで，どの場所もどの方向にも違いがない」。このような大きい対称性を持つ世界の法則が微分作用素を用いて記述されるとすれば，この微分作用素はどのようなものでなければならないか。実は，空間の対称性を反映する微分作用素^{*3)}は本質的にラプラス作用素しかない（正確にはラプラス作用素の多項式しかない）。ここで，直交座標系を取るにより空間を3次元数空間 \mathbb{R}^3 と同一視すると，ラプラス作用素は

*1) 1968年にフランス，パリのカルティエ・ラタンから始まり，世界中の大学に広がった学生の抗議行動。

*2) 全般的な参考文献としては，拙著¹⁾を挙げておく。

*3) すべての合同変換と可換な（スカラー関数をスカラー関数に写す）微分作用素。