August 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 554

特集／複素数

巻頭言

野口 潤次郎

虚数 i は，$i^2=-1$ をみたす仮想の数として，今は高校2年生で習う．そして，2つの実数 $x,y\in\mathbf{R}$ を用いて $z=x+iy$ と表されるものが複素数と呼ばれる数である．i を有効に用いた初めはカルダノ（1501～1576）による3次方程式の解法であろう．しかしこれを関数の変数の中に取り入れ，数学的にきちんとした対象として扱ったのはオイラー（1709～1783）である．我が国で言えば，享保の将軍吉宗の時代である．近所のお寺の墓石をみても享保と刻んであるものがないではないが，さすがに少ない．複素数，指数関数，三角関数の関係式で

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

はオイラーの公式としてよく知られている．それまで無関係に習ってきたものの間にこのような単純な美しい式が成り立つことは驚きである．高校生から大人までこのオイラーの公式にシビレル人は，けっこういるのである．しかしながら，虚数を含む複素数が，“数”として認知されるには，まだ多くの紆余曲折を経なければならないのであった．

ガウス（1777～1855）は，複素数 $z=x+iy$ を平面座標空間の点 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ と対応させる幾何学的解釈を与えた．複素数の全体 $\mathbf{C}$ を平面と見たものをガウス平面と呼ぶ．ガウスの名が冠されているからと言って，この観点が一人ガウスによるものではないことは，歴史の多くの事柄と同様である．ともあれ，これが複素数の幾何学的解釈を与え，後年のポアンカレによる双曲的幾何学の実現に繋がる．しかし，この時点でより大きな成果は，**代数学の基本定理**を得たことであると思う．任意の複素数を係数とする代数方程式

$$P(z)=\sum_{j=0}^{n}c_jz^{n-j}=0$$

は，必ず複素数の中で根を持つことが示された（1799～）．実際ガウスは，証明を3回与えているそうである．“～”は，その意味である．ある数の体系が与えられ，その体系の数を係数とする代数方程式を立てるとき，解をその体系の中に求めることは，自然な行いである．1次方程式をもとにすれば，自然数から整数が生まれ，有理数ができる．さらに $x^2=2,x^3=2$ 等から無理数を含む実数ができる．ここには，実は極限操作が入ってくることに注意したい．そして，初めに述べたカルダノのように，その根が初めの体系になければ，それを加えて数の体系を大きくするという，代数方程式についてのこの操作は，複素数で極まるのである．その意味で，複素数の体系は完全である．その頃の日本では，松平定信が財政改革に腐心し，美術では北斎，広重，文学では馬琴，学問では宣長が古事記伝を完成し，篤胤へと移る時代である．また，隠居した伊能忠敬が地球の大きさを知りた