MATHEMATICAL SCIENCES

October 2009 Number 556

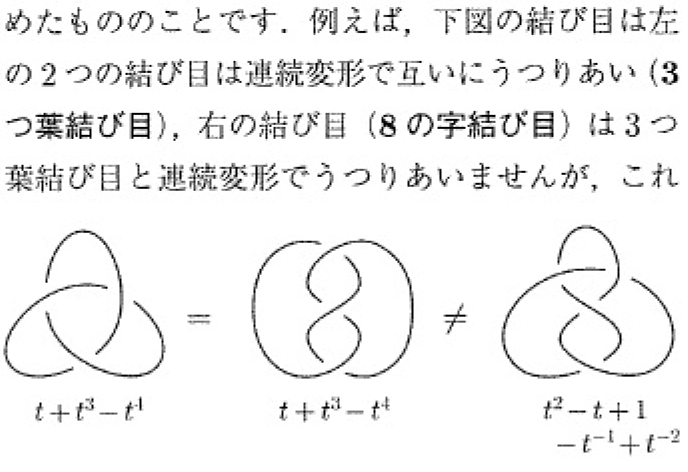
特集／数学と物理に広がる不変量

量子トポロジーと不変量

大槻 知忠

1980年代の半ばにジョーンズ多項式が発見されたことを発端として，数理物理的な手法が低次元トポロジーに導入され，結び目と3次元多様体の大量の不変量が発見されました．これらの不変量は，数理物理，統計物理，量子群，作用素環などの周辺分野と関連して研究されており，この研究領域は**量子トポロジー**（**quantum topology**）と呼ばれています．本特集で考えている不変量は主に量子トポロジーででてくる不変量です．

トポロジーにおける**不変量**とは，幾何学的対象に対してある値を定める対応であって，その幾何学的対象を連続的に変形したときにその値が不変であるようなもののことです．円周を3次元ユークリッド空間にうめこんだもののことを**結び目**といいますが，例えば，結び目の不変量（**イソトピー不変量**といいます）とは，結び目の連続変形（イソトピー）で不変になるように各結び目に値を定めたもののことです．例えば，下図の結び目は左の2つの結び目は連続変形で互いにうつりあい（**3つ葉結び目**），右の結び目（**8の字結び目**）は3つ葉結び目と連続変形でうつりあいませんが，これらの結び目の不変量であるジョーンズ多項式はそれぞれの結び目の下にかいた値になります．連続変形でうつりあう結び目を「同じ」結び目とおもうことにすると，ポイントは



$$\text{同じ結び目} \Longrightarrow \text{不変量の値は同じ}$$

$$\text{不変量の値が異なる} \Longrightarrow \text{結び目は異なる}$$

ということです（それぞれの矢印の逆は成り立つとは限りません）．一般に，与えられた2つの結び目が同じであることを確かめるのは比較的簡単（つまり，変形してうつりあう手順を具体的にかいてやればよい）ですが，2つの結び目が異なることを証明するのは簡単ではありません（少し変形してみてうつりあわなかったとしても，もっと変形するとうつりあうかもしれないので）．しかし，不変量を使うと2つの結び目が異なることを（もしそれらの不変量の値が異なっている場合は）比較的簡単に示すことができます．例えば，3つ葉結び目と8の字結び目は，それらのジョーンズ多項式の値が異なっていることにより，異なる結び目であることがわかります．

また，トポロジーででてくる基本的な幾何学的対象に多様体というものがあります．おおざっぱにいうと，例えば，2次元多様体は曲面，3次元多様体は（曲がっている）3次元空間だとおもってください．多様体の不変量（**位相不変量**といいます）とは，