November 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 557

特集／可積分系の世界

はじめに

時弘 哲治

1. 数理科学の目標

数理科学の目標の一つは，数学を言葉および手段として私たちの身の回りにある自然や社会を理解し，私たちの生活に役立てることであろう．現実の自然現象あるいは社会現象は大変複雑であるため，まずその現象を記述するモデルを立て，そのモデルが現象の特徴を再現することを確かめてモデルの妥当性を確認し，そのモデルの数学的構造から現象の本質を理解し，そのモデルから導かれる結論によって現象の制御・応用を考えることになる．例えば，台風の渦の動きなどような巨視的な現象を考えるには流体の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式などの微分方程式によるモデルを用い，半導体の電子状態といった微視的な世界を記述するには量子力学に基づいたモデルを扱っている．

しかし，実際に微分方程式や量子力学などを使ったことのある人はたぶんお分かりと思うが，現象のモデルとして考えつく微分方程式のほとんどは解くことはできないし，現実的な量子系のハミルトニアンを対角化することも，統計力学模型の分配函数を求めることも，多くの場合不可能である．そのため，定性的な議論，近似手段，数値計算などに頼らざるを得ない．計算機の性能および計算スキームが飛躍的に向上した現在では，モデルができた場合，とりあえず，数値計算して結果をみることが多いように思われる．むろん，その定性的な理論や数値シミュレーションの結果で十分満足の行く結果が得られることも多いが，できるものなら厳密に解いてすっきりしたいのが人情であろう．

2. 可積分系とは

厳密に解けるモデルの理想的な例としては，本特集でも Willox 氏の記事に登場するソリトン（粒子的な振舞いをする孤立波）があげられる．孤立波の観測された浅い水面を伝わる孤立波を記述するために，流体の基礎方程式から **KdV** (Korteweg-de Vries) 方程式が導かれたが，それは実際に孤立波解を再現することによって妥当性が認められた．その後の孤立波の粒子性の発見などを通じて，KdV 方程式の数学的構造（線形系の両立条件であること，対称性，無限次元のハミルトン構造など）を明らかにすることによって，初期値問題の解法が示され，多重ソリトン解が構成された．その結果，物理学分野ではソリトンという素励起の概念が導入され，工学面では光ソリトン通信などへ応用されてきた．また，ソリトンの統一理論である佐藤