まずは基本事項をチェック

2　微分法とその応用

2.1　関数の極限と連続性

◆ **関数の極限**　x の関数 $f(x)$ が点 a を含むある区間で定義されているとする（$x=a$ では定義されていても定義されていなくてもよい）．x がその区間内を変化して a に限りなく近づくとき $f(x)$ が一定値 A に限りなく近づくならば，x が a に近づくとき $f(x)$ は**極限値** A に**収束する**といって，記号で

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{あるいは} \quad f(x)\to A \quad (x\to a)$$

などと書く．数列のときと同様に $\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ も定義される．

また，$f(x)$ が $x \geqq a$ の範囲で定義されていて，x が限りなく大きくなるとき $f(x)$ が一定値 A に限りなく近づくならば，x が限りなく大きくなるとき $f(x)$ は極限値 A に収束するといって，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{あるいは} \quad f(x)\to A \quad (x\to\infty)$$

などと書く．$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ なども同様に定義される．

x が a より大きい方から（または小さい方から）a に近づくとき $f(x)$ が一定値 A に近づくならば

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \quad (\text{または} \ \lim_{x\to a-0} f(x) = A)$$

などと書き，A を**右側**（または**左側**）**極限値**という．$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$ なども同様に定義される．なお，$x\to 0+0$（または $x\to 0-0$）は単に $x\to +0$（または $x\to -0$）と書く．

◆ **関数の極限に関する基本定理**　関数の極限に関して，一般に次のことが成り立つ．

定理 2.1（定数倍，和，差，積，商の極限，はさみうちの定理）

$f(x)\to A \ (x\to a)$，$g(x)\to B \ (x\to a)$ のとき

(i)　$f(x)\pm g(x)\to A\pm B \quad (x\to a)$

(ii)　$f(x)g(x)\to AB \quad (x\to a)$，特に $cf(x)\to cA \quad (x\to a)$　（c は定数）

(iii)　$\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{A}{B} \quad (x\to a)$　（ただし $B\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ とする）

(iv)　$f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$，$f(x)\to A \ (x\to a)$，$g(x)\to A \ (x\to a)$ ならば $h(x)\to A \ (x\to a)$　（はさみうちの定理）

重要な定理はしっかり覚えよう!

定理 2.2（合成関数の極限値）　関数 $y=f(x)$，$z=g(y)$ に対して $\lim_{x\to a} f(x)=b$，$\lim_{y\to b} g(y)=A$ ならば，$\lim_{x\to a} g\{f(x)\}=A$ が成り立つ．

定理 2.3（重要な極限値）

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$　　(iv)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

◆ **無限小，無限小の位数**　変数 u が 0 に収束するとき，u を**無限小**という．u, v がともに無限小で，u/v が 0 でない有限の値に収束するとき，u, v は**同位の無限小**であるという．u/v がまた無限小ならば，u は v より**高位の無限小**であるという．これは u の方が v よりも速く 0 に近づくことを意味する．さらに，u と $v^k \ (k>0)$ が同位の無限小ならば u は v に対して **k 位の無限小**であるという．

◆ **連続関数**　点で連続　$f(x)$ が点 a を含むある開区間で定義されていて

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad (\text{または} \ \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a))$$

が成り立つとき，$f(x)$ は a で**右側**（または**左側**）**連続**であるという．$f(x)$ が点 a で右側かつ左側連続のとき，すなわち

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

のとき $f(x)$ は点 a で**連続**であるという．そうでないときは，点 a で**不連続**であるという．したがって次のいずれかの場合は点 a で不連続である（⇨ 図 2.1）．

(i)　$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しないとき．これは $\pm\infty$ に発散することもあるし，右側，左側極限値が一致しない場合，このいずれかが存在しない場合である．

(ii)　$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しても $f(a)$ が存在しないとき．

(iii)　上の両方が存在しても一致しないとき．

図形的にいうと関数 $f(x)$ が点 a で不連続であるときは，曲線 $y=f(x)$ が点 $A(a, f(a))$ で切れているということである．

区間で連続　$f(x)$ が開区間の各点で連続のとき $f(x)$ はその**区間で連続**であるという．また $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で定義されていて，開区間 (a, b) で連続で，点 a, b でそれぞれ右側，左側連続のとき，$f(x)$ は**閉区間 $[a, b]$ で連続**であるという．関数の連続性に関しては次の諸定理が成り立つ．

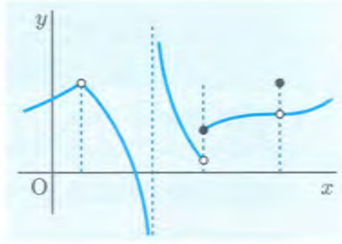


図 2.1　不連続の例

まずは基本をチェック

ここで覚えた定理を使って…

定理 2.4（諸演算の連続性）$f(x)$, $g(x)$ がともに点 a で連続ならば，$cf(x)$（c は定数），$f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ および $f(x)/g(x)$（$g(a)\neq 0$ とする）も a で連続である．

定理 2.5（合成関数の連続性）$y=f(x)$ が点 a で連続で，$z=g(y)$ が点 $f(a)$ で連続ならば，合成関数 $z=g\{f(x)\}$ は点 a で連続である．

定理 2.6（連続関数の性質）$f(x)$ が点 a で連続で $f(a)\neq 0$ ならば，a に十分近い点 x において $f(x)$ は $f(a)$ と同符号である．

定理 2.7（中間値の定理）$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で $f(a)<f(b)$ とする．η を $f(a)<\eta<f(b)$ なる任意の値とするとき，$f(c)=\eta$ となる c が開区間 (a,b) の中に少なくとも 1 つ存在する（$f(a)>f(b)$ のときも同様である）．特に，$f(a)f(b)<0$ ならば方程式 $f(x)=0$ は開区間 (a,b) において少なくとも 1 つの実数解をもつ．

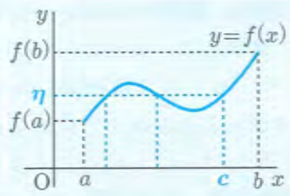


図 2.2

定理 2.8（最大値・最小値の存在）$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続ならば，$f(x)$ はこの区間で最大値，最小値をとる．

◆ **逆関数**　関数 $f(x)$ が $x<x'$ に対して $f(x)\leqq f(x')$ となるとき**増加関数**という．特に等号が成り立たないときは**狭義の増加関数**という．**減少関数**，**狭義の減少関数**も同様に定義される．$f(x)$ が狭義の増加（または減少）関数のときは，$f(x)$ の値域の y の値を 1 つあたえると $y=f(x)$ となる x の値はただ一つ決まる．この関数を $g(y)$ で表すとき，$g(y)$，あるいは y を x でおきかえたもの $g(x)$ を $f(x)$ の**逆関数**といって，g を f^{-1} と書く．$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $\boldsymbol{y=x}$ に関して対称である．

定理 2.9（逆関数の連続性，単調性）$f(x)$ が連続な狭義の増加（または減少）関数であれば，その逆関数 $f^{-1}(x)$ もまた連続な狭義の増加（または減少）関数である．

対数関数 $y=\log x$ と指数関数 $y=e^x$ は互いに逆関数の関係にある．三角関数 $y=\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, はそれぞれ $-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2$, $0\leqq x\leqq\pi$, $-\pi/2<x<\pi/2$ の範囲で狭義の増加あるいは減少関数となるから，それらの逆関数

$$y=\sin^{-1}x\ (\text{アークサイン}\ x),\quad \cos^{-1}x\ (\text{アークコサイン}\ x),\quad \tan^{-1}x\ (\text{アークタンジェント}\ x)$$

が存在する．これらを総称して**逆三角関数**という（⇨p.22 の例題 4，図 2.4）．

例題に TRY!!

例題 1　　関数の極限値

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$　$(0<a\neq1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sin x$

route　(1) 分子の有理化　(2) $(1+x)^{1/x}\to e\ \ (x\to0)$ の利用　(3) $\dfrac{\sin x}{x}$ に着目　(4) はさみうちの定理

navi　極限値が求めやすい形に変形

問題を解くコツはこれ。

この方法で考えてみよう。

解答 (1) $\displaystyle\sqrt{x^2+3x+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x+1}-x)(\sqrt{x^2+3x+1}+x)}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$

$\displaystyle=\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$ と変形しておけば，

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{\log a}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\log a}\log(1+x)^{1/x}=\frac{\log e}{\log a}=\frac{1}{\log a}$$

(3) $$\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}=\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$

よって

$$\lim_{x\to0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\frac{1}{1+\cos 3x}=(3\cdot1)^2\frac{1}{1+1}=\frac{9}{2}$$

(4) 常に $-1\leqq\sin x\leqq1$ かつ $e^{-x}>0$ であるから，$-e^{-x}\leqq e^{-x}\sin x\leqq e^{-x}$．ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(-e^{-x})=0$．よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sin x=0$

問　題

次はヒントなしで挑戦！

1.1　次の極限値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin^{-1}x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$　$(0<a\neq1)$

1.2　次の極限値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{a}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2+x}-\sqrt{a^2-x}}{x}$

※例題をマネして解いてみよう。　　解答は P.183

$$n+1>\frac{n(n-1)}{2}(a_n)^2.$$ いま n は十分大きい数を考えているので $n-1>0$

と考えてよい．これより $\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}>(a_n)^2.\quad \therefore\ \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}}>a_n>0.$

したがって $a_n\to 0\ (n\to\infty)$．ゆえに $\sqrt[n]{n+1}\to 1\ (n\to\infty)$ となる．

(2) $a_n=\dfrac{e^n}{n+1}$ とおけば，$\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{e}{\sqrt[n]{n+1}}$．上記 (1) より，$\sqrt[n]{n+1}\to 1\ (n\to\infty)$．
ゆえに $n\to\infty$ のとき，$\sqrt[n]{a_n}\to e>1$ となる．よって p.6 の定理 1.6(i)（コーシーの判定法）により発散する．

(3) $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n\log n}$ とすると，$|a_n|=\dfrac{1}{n\log n}>\dfrac{1}{(n+1)\log(n+1)}$

$\dfrac{1}{n\log n}\to 0\ (n\to\infty)$ であるので p.11 の定理 1.8 により与えられた交項級数は収束する．

次に $\sum|a_n|=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ について考える．

$|a_1|\geqq|a_2|\geqq\cdots\geqq|a_n|\geqq\cdots>0$ であり，$f(x)=\dfrac{1}{x\log x}$ とおくと，$f(x)$ は $x\geqq 2$ で定義された単調減少する連続関数であるので p.6 の定理 1.7（積分判定法）を用いる．

$$\int_2^n\frac{dx}{x\log x}=\int_{\log 2}^{\log n}\frac{1}{t}dt=\Big[\log t\Big]_{\log 2}^{\log n}=\log(\log n)-\log(\log 2)\quad (\log x=t\ とおいた)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_2^n\frac{dx}{x\log x}$ は発散であるので $\sum|a_n|$ は発散である．

ゆえに与えられた級数は条件収束である．

2. 不等式 $\sqrt{pq}\leqq\dfrac{1}{2}(p+q),\ p\geqq 0,\ q\geqq 0$ を用いる．いま，$p=|a_n|,\ q=\dfrac{1}{n}$ とおくと，上記不等式より，$\left|\dfrac{a_n}{n}\right|=\sqrt{\dfrac{a_n^2}{n^2}}\leqq\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$．仮定から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ は収束し，p.8 の例題 6 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ も収束する．ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$ は収束する．したがって p.6 の定理 1.5 により $\sum\left|\dfrac{a_n}{n}\right|$ は収束する．よって与えられた級数は絶対収束する．

3. p.8 の例題 6（$p=1$ の場合）により $S_n\to\infty\ (n\to\infty)$ である．いま $a_n=\dfrac{1}{nS_n}$ とおけば，

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{(n+1)S_{n+1}}{nS_n}=\frac{(n+1)\{S_n+1/(n+1)\}}{nS_n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)S_n}\right)\to 1\quad (n\to\infty)$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{nS_n}$ の収束半径は 1 である．

4. p.6 の定理 1.7（積分判定法）を用いる．

$a_n=\dfrac{\log n}{n^2}$ は $a_2>a_3>\cdots>a_n>\cdots>0$ である．また $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ は $x\geqq 2$ で定義された関数とすると，単調減少する連続関数である．

$$\int_2^n\frac{\log x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_2^n+\int_2^n\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{\log x}{x}\right]_2^n+\left[-\frac{1}{x}\right]_2^n=-\frac{\log n}{n}+\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_2^n\frac{\log x}{x^2}dx=\frac{\log 2}{2}+\frac{1}{2}$．したがって $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$ は収束する．

2章の解答

1.1 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(3x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{7}{10}.$

(2) $\sin^{-1}x=y$ とおけば，$x=\sin y$ で $y\to 0\ (x\to 0)$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^{-1}x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

(3) $a^x=1+y$ とおけば，$x=\log_a(1+y)$ で $y\to 0\ (x\to 0)$ であるから，p.19 の例題 1 (2) を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\log a.$

1.2 (1) $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$ より，$0\leqq\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq\lim_{x\to 0}|x|=0$．ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$

(2) $\dfrac{a}{x}=z$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $z\to 0$ となるので $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{a}{x}=\lim_{z\to 0}a\frac{\sin z}{z}=a.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-\sqrt{a^2-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2+x-(a^2-x)}{x(\sqrt{a^2+x}+\sqrt{a^2-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a^2+x}+\sqrt{a^2-x}}=\frac{1}{|a|}.$

2.1 (1) $x^3+3x=x(x^2+3)$，$\dfrac{x^3+3x}{x}=x^2+3\to 3\quad (x\to 0)$ で 1 位の無限小．

(2) $\tan^{-1}x=y$ とおけば，$x=\tan y,\ y\to 0\quad (x\to 0)$ であるから，
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=1$ となって，1 位の無限小．

(3) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}}$ で $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$ となり 1 位の無限小．

2.2 (1) $1-\cos x=1-\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ であるから，
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\Big/\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ となり，2 位の無限小．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi(1+x)}{x}=-\pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}=-\pi$ で 1 位の無限小．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{3-4x}=\sqrt[5]{3}$ で $\dfrac{2}{5}$ 位の無限小．

2.3 題意から $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}=A,\ \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}=B$．$A,B\fallingdotseq 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^n}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}\cdot x^{m-n}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}=B$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\Big/x^{m-n}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}\Big/\frac{g(x)}{x^n}=\frac{A}{B}\fallingdotseq 0$ で，
$f(x)+g(x)$ は n 位の無限小，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $m-n$ 位の無限小である．

ちょっと難しい問題も解いてみよう！

演習問題でレベルアップ

演習問題　2-A

1　次の関数の $\lim_{x\to+0} f(x)$, $\lim_{x\to-0} f(x)$ は存在するかどうか調べよ.

(1)　$f(x)=e^{1/x}$　　(2)　$f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$

(3)　$f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

2　$x\to0$ のとき次の関数は x に対して何位の無限小であるか.

$$2\sin x-\sin 2x$$

3　次の極限値を求めよ.

(1)　$\lim_{\theta\to0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}$

(2)　$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$　$(x>0)$

4　$f(x)$ が $x=a$ において連続であるとき, $|f(x)|$ もまた $x=a$ で連続であることを証明せよ.

5　$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ は $x=0$ で連続であるかどうか調べよ.

6　方程式 $(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ は 0 と 1 との間 … 解を もつことを証明せよ $\left(1>\dfrac{\pi}{4}\right.$ より不等式 $\sin 1>\sin\dfrac{\pi}{4}$ が …

例題7を見てみよう。

7　次の関数を微分せよ.

(1)　$y=(2x^2+3)^2(3x+1)^3$　　(2)　$y=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$

(3)　$y=\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}+\log\sqrt{1-x^2}$　($\sin^{-1}x=t$ とおく)

8　次の極限値を求めよ.

(1)　$\lim_{x\to0}\dfrac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$　→ 例題13を見てみよう。 … $_{-0}\left(x\tan x-\dfrac{\pi}{2}\sec x\right)$

(3)　$\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$　… $_{x\to+0}\ x^x$

(5)　$\lim_{x\to\pi/4-0}\tan 2x\cdot\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

9　半径 $r>0$ の円に内接する長方形のうちで面積が最大となるものを求めよ.

10　閉区間 $[a,b]$ において常に $f''(x)>0$ とすれば, $[a,b]$ の任意の 3 点 x_1, x_2, x_3 (ただし $x_1<x_2<x_3$) に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3)\end{vmatrix}>0$$

11　次の関数のグラフを描け.

(1)　$y=e^{-x^2}$　　(2)　$y=x\log x$

演習問題　2-B

さらにレベルアップして試験対策も万全

1　n を正の整数とするとき, 次の極限値を求めよ.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n+x^{n+1}}{1-x^n+x^{n+2}}$$

2　$y=\sin^{-1}x$ について次の問に答えよ.

(1)　$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$ (n …

(2)　$y^{(n)}$ の $x=0$ における値が次のようになることを示せ.

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}(n-2)^2(n-4)^2\cdots3^2\cdot1^2 & (n：奇数)\\ 0 & (n：偶数)\end{cases}$$

(3)　y を x の整級数に展開せよ.

3　次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

4　$\dfrac{4}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値, 最小値を求めよ.

5　次の関数のグラフを描け.

(1)　$y=(x-2)e^x$　　(2)　$y=\dfrac{1}{\ }\log x$　　(3)　$y=x^2e^{-x}$

解けなかった問題や間違えた問題は
例題を復習して再挑戦。
しっかりと理解して
確かな実力を身につけよう。

詳しい解答はP.195 →

例題 7 ―― 微分可能性

次の関数の原点における微分可能性を調べよ．

(1)　$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　　(2)　$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

route　微分可能とは $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在することである．

navi　微分可能の定義にもどる

解答　(1)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\sin\frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$

これは極限値をもたないので $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない（⇨ p.50 演習問題 2–A **5**）．

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h^2\sin\frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h} = 0$（⇨ p.21 例題 3 (2)）．

ゆえに $f(x)$ は $x=0$ で微分可能である．

問　題

7.1　次の関数の微分可能性を調べよ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

7.2†　$\displaystyle f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$ の連続性と微分可能性について調べよ．

7.3††　$f(x)$ が点 a で微分可能で $f(a) > 0$ とするとき，

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)}{f(a)}\right\}^{1/h} = e^{f'(a)/f(a)}$$

であることを証明せよ．

7.4　次の関数の $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, $f'(0)$ を定義にしたがって計算せよ．

(1)　$f(x) = \begin{cases} x\tan^{-1}\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　　(2)　$f(x) = \begin{cases} x\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

navi　右側微分係数　左側微分係数

† $|x| > 1$, $|x| = 1$, $|x| < 1$ と分けて考えよ．

†† $\left\{\dfrac{f(a+h)}{f(a)}\right\}^{1/h}$ の対数をとって考えよ．

例題 8 ―― 微分の計算

次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \cos^{-1}\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}$　　(2)　$y = a^{\tan^{-1}x}$　$(a > 0)$

route　(1)　合成関数の導関数（⇨ p.25 の定理 2.11）．　(2)　対数微分法（両辺の対数をとって，p.25 の定理 2.14 を用いる方法）．

navi　合成関数の導関数，対数微分法を用いる．

解答　(1)　$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}\right)'$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}\right)^2}} = \frac{5+4\cos x}{\sqrt{9(1-\cos^2 x)}} = \frac{5+4\cos x}{3\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{5+4\cos x}{3|\sin x|}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4+5\cos x}{5+4\cos x}\right) = \frac{-5\sin x(5+4\cos x)+4\sin x(4+5\cos x)}{(5+4\cos x)^2} = \frac{-9\sin x}{(5+4\cos x)^2}$$

$$\therefore\quad y' = -\frac{5+4\cos x}{3|\sin x|}\cdot\frac{-9\sin x}{(5+4\cos x)^2} = \frac{3\sin x}{(5+4\cos x)|\sin x|}$$

注意 2.4　$x \geqq 0$ のときは $\sqrt{x^2} = x$，$x < 0$ のときは $\sqrt{x^2} = -x$ である．したがって，$\sqrt{(\sin x)^2} = |\sin x|$ である．

(2)　対数微分法を用いる．つまり両辺の対数をとると，

$$\log y = \tan^{-1}x\cdot\log a$$

この両辺を x について微分すると，$\dfrac{y'}{y} = \log a\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\therefore\quad y' = a^{\tan^{-1}x}\frac{\log a}{1+x^2}.$$

問　題

8.1　次の関数を微分せよ．

(1)　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$　　(2)　$\dfrac{x^2-1}{3x^2+1}$　　(3)　$\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(4)　$\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$　　(5)　e^{x^x}　　(6)　$(\tan x)^{\sin x}$

(7)　$\log(x+\sqrt{1+x^2})$　　(8)　$\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+a^2}}$　$(a > 0)$

8.2　双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$（⇨ p.23 の追記 2.1）を微分せよ．

例題 13 ―― 不定形の極限値

次の極限値を求めよ．

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^x$　　(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

route いずれも不定形の極限値であるからロピタルの定理を利用する．(3) はマクローリンの定理の利用が簡単である．

navi 不定形の極限値　ロピタルの定理 $\left(\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ やマクローリンの定理を利用．

追記 2.2 p.36 の定理 2.21 は $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形のときは直接使うことができるが，その他の不定形については次の変形を行えばこの定理を使うことができる．

$\infty-\infty$　：　$f-g=\dfrac{1/g-1/f}{1/f\cdot1/g}$　$\left(\dfrac{0}{0}\text{となる}\right)$

$0\times\infty$　：　$fg=\dfrac{f}{1/g}$　$\left(\dfrac{0}{0}\text{あるいは}\dfrac{\infty}{\infty}\text{となる}\right)$

$1^\infty, 0^0, \infty^0$　：　$f^g=h$ とおいて $\log h=g\log f$ として $\lim\log h$ を求めれば，$\lim h=\lim e^{\log h}$ である．

解答 (1)　0/0 の形であるから，分母，分子の微分を続ければ

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2+x+1}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

あるいは，分母，分子の因数分解を考えて

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

(2)　$\tan^{-1}x\to\dfrac{\pi}{2}\ (x\to\infty)$ であるから 1^∞ の形の不定形である．$y=\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^x$ とおくと，$\log y=x\log\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)=\dfrac{\log\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)}{\dfrac{1}{x}}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\log y=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\tan^{-1}x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\tan^{-1}x}=-\frac{2}{\pi},\qquad\lim_{x\to\infty}y=e^{-2/\pi}.$$

(3)　$\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x=\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$ と変形しておいて，$\sin x$, $\cos x$ にマクローリンの定理を用いると ($0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1$),

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\cos\theta_1x}{5!}x^5,\quad\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos\theta_2x}{4!}x^4.$$

ゆえに，

$$\sin^2x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{\cos\theta_1x}{5!}x^5\right)^2=x^2+\frac{x^6}{36}+\left(\frac{\cos\theta_1x}{5!}\right)^2x^{10}-\frac{x^4}{3}+\frac{2\cos\theta_1x}{5!}x^6-\frac{\cos\theta_1x}{5!\cdot3}x^8$$

$$=x^2-\frac{1}{3}x^4+\varepsilon_1,\quad\frac{\varepsilon_1}{x^4}\to0\quad(x\to0),$$

$$\varepsilon_1=\left(\frac{1}{36}+\frac{2\cos\theta_1x}{5!}\right)x^6-\frac{\cos\theta_1x}{5!\cdot3}x^8+\left(\frac{\cos\theta_1x}{5!}\right)^2x^{10}$$

$$\cos^2x=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos\theta_2x}{4!}x^4\right)^2=1-x^2+\varepsilon_2,\qquad\frac{\varepsilon_2}{x^3}\to0\quad(x\to0),$$

$$\varepsilon_2=\left(\frac{1}{4}+2\frac{\cos\theta_2x}{4!}\right)x^4-2\frac{\cos\theta_2x}{4!}\frac{x^6}{2}+\left(\frac{\cos\theta_2x}{4!}\right)^2x^8$$

したがって，

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\dfrac{1}{3}x^4+\varepsilon_1-x^2(1-x^2+\varepsilon_2)}{x^2\left(x^2-\dfrac{1}{3}x^4+\varepsilon_1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{\varepsilon_1}{x^4}-\dfrac{\varepsilon_2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{\varepsilon_1}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

問　題

13.1　次の極限値を求めよ．

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\log(1+x)}{x^2}$　　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{1-\cos x}$

(4) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\tan x-\sec x)$　　(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

13.2　次の極限値を求めよ．

(1) $\lim\limits_{x\to+0}x\log(\sin x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to1-0}x^{1/(1-x)}$

(3) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{1/x}$

13.3　マクローリンの定理を用いて次の極限値を求めよ．

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x-x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right\}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}\right)}{x^6}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

19.2 台形の底角を θ とすると，底辺の長さは $a+2a\cos\theta$，高さは $a\sin\theta$ である．したがって台形の面積は

19.2

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a^2(1+\cos\theta)\sin\theta \quad (0<\theta<\pi). \\ f'(\theta) &= a^2(1+\cos\theta)\cos\theta - a^2\sin^2\theta \\ &= a^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1) \\ &= a^2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1). \end{aligned}$$

ゆえに，$0<\theta<\pi$ で $f'(\theta)=0$ となるのは $\cos\theta=1/2$ のとき，すなわち $\theta=\pi/3$ のときである．

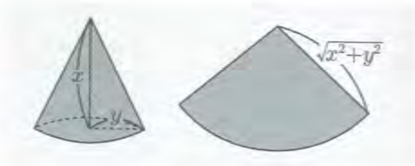
θ	0	$\cdots$	$\pi/3$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	

ゆえに，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $f(\theta)$ は最大値をとり，その値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ である．

19.3 円錐の体積を V，側面積を S，高さを x，底面の半径を y とする．

$$V=\frac{\pi}{3}xy^2, \quad S=\pi y\sqrt{x^2+y^2}$$

であるから



19.3

$$S=\pi\sqrt{\frac{3V}{\pi x}}\sqrt{x^2+\frac{3V}{\pi x}}=\sqrt{3V}\frac{\sqrt{\pi x^3+3V}}{x}.$$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{\pi x^3+3V}}{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{\pi x^3-6V}{2x^2\sqrt{\pi x^3+3V}} \quad \text{であるから} \quad x=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

のとき $f(x)$ は最小となる．したがってこのとき S も最小となる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{6V/\pi}$	$\cdots$
f'		$-$	0	$+$
f		↘		↗

このとき $y^2=\dfrac{3V}{\pi\sqrt[3]{6V/\pi}}=\sqrt[3]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}$ となるから，

$$x : y=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} : \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}=\sqrt{2} : 1.$$

20.1 $f(x)=x^3-3x+1$ とおくとき，$f'(x)=3x^2-3$, $f''(x)=6x$. $(0,1)$ で $f''(x)>0$, $f(0)=1>0$, $f(1)=-1<0$ であるので p.48 の例題 20 (1) より方程式 $f(x)=0$ は 0 と 1 との間にただ 1 つの解を持つ．

次に (2) により，$a_1=0$ を第 1 近似値とすると，第 2 近似値 a_2，第 3 近似値 a_3 は，

$$a_2=0-f(0)/f'(0)=1/3$$
$$a_3=1/3-f(1/3)/f'(1/3)\fallingdotseq 0.347$$

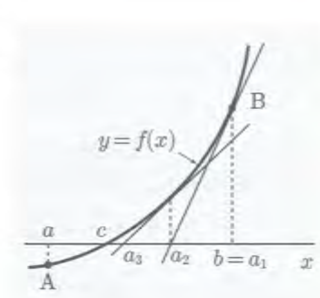
20.2 $f(x)=x-\cos x$ とおくと $f(0)=-1<0$, $f(\pi/2)=\pi/2>0$ であり，$f'(x)=1+\sin x>0$, $f''(x)=\cos x>0 \quad (0<x<\pi/2)$ であるから，方程式 $f(x)=0$ は 0 と $\pi/2$ の間にただ一つの実数解 c をもつ（右図 **20.2** を参照して p.48 の例題 20 と同様に証明できる）．$b=a_1=\pi/4$ を第 1 近似値とすると第 2 近似値 a_2 は

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\pi}{4}-\frac{f(\pi/4)}{f'(\pi/4)} \\ &= \frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.739. \end{aligned}$$

右の **20.2** は $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f''(x)>0$

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \quad b=a_1$$

のときの図である．



20.2

◆ 演習問題 2-A の解答

1. (1) $\displaystyle\lim_{x\to-0}e^{1/x}=\lim_{x\to-0}\frac{1}{e^{-1/x}}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}e^{1/x}=+\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}e^{1/x}$ は存在しない．

(2) $\dfrac{1}{x}\to+\infty\ (x\to+0)$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=0$.

また $\dfrac{-1}{x}\to+\infty\ (x\to-0)$ であるから，$2^{1/x}=\dfrac{1}{2^{-1/x}}\to0\ (x\to-0)$. ゆえに，

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=1$ で $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{1+2^{1/x}}$ は存在しない．

(3) $\left|\dfrac{x}{1+e^{1/x}}\right|\leqq|x|$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x}{1+e^{1/x}}=\lim_{x\to-0}\frac{x}{1+e^{1/x}}=0$.

2. $2\sin x-\sin 2x=2\sin x-2\sin x\cos x=2\sin x(1-\cos x)=4\sin x\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}$ より，

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\Big/\frac{x}{2}\right)^2=1$ で 3 位の無限小である．

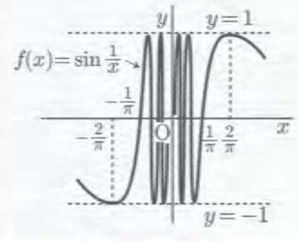
3. (1) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{1}{\cos\theta}=1$

(2) $\sqrt[n]{x}-1=z$ とおくと $n\to\infty$ のとき $z\to0$. また $n=\dfrac{\log x}{\log(z+1)}$ であるので

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim_{z\to0}\frac{\log x}{\log(z+1)}z=\log x$

4. $f(x)$ が $x=a$ で連続とすると $|f(x)-f(a)|\to0\ (x\to a)$ であるから，不等式 $\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqq|f(x)-f(a)|$ によって $|f(x)|\to|f(a)|\ (x\to a)$ である．ゆえに，$|f(x)|$ は $x=a$ において連続である．

5. $x\to0$ とすると，特に $\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\ (n=0,1,2,\cdots)$ となるような x，すなわち $x=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ に対しては，$f(x)$ は 0 $(=f(0))$ に収束しない（実は $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)$ は存在しない）．したがって $f(x)$ は $x=0$ で不連続である．



問題 2-A 5