MATHEMATICAL SCIENCES
January 2010 Number 559

特集／無限次元の魅力

はじめに

無限次元とは何か

河東 泰之

初対面の人に職業は数学者だと言うと，何を研究しているのかと聞かれることがある．答えは，相手がどのくらい数学になじみがあるかによるのだが，理科系の人相手の場合は，無限次元行列の理論だと答えることがよくある．理科系で行列を知っている人でも，こう言うと何かとてつもないことのように反応する人は少なくない．「4 次元でも何か常識を超えた話なのに，無限次元なんて」というわけである．しかし数学的には無限次元を考えること自体は何ら大したことはなく，必然的なものである．

n 次元ベクトル空間の一番簡単な例は，数を n 個並べたベクトルたちを考えたものである．そう思うと，$n=3$ でも $n=1,000,000$ でも理論的には大した違いはない．様々な実験，観測データを並べてベクトルだと思うと統計的取扱いに便利だということはよくあり，そう思えばデータの数が 2 個や 3 個しかないことのほうがむしろまれである．データは通常有限個であるが，無限個の数を並べて考えることにするのも，とりあえずはそれほど大きな発想の飛躍ではない．

数学的な立場からみたとき，無限次元のベクトル空間が出てくる自然な状況は関数を考えるときである．n 個の点からなる集合の上の任意の関数を考えよう．このような関数は，n 個の値を並べて考えれば，n 次元のベクトルを考えているのと同じことであり，関数の足し算，定数倍は，ベクトルの足し算，定数倍に対応している．普通，関数を考えるときは，有限集合ではなく，実数全体や区間のような無限集合を考えるので，その上の関数たちは，無限個の数が並んだもの，すなわち無限次元ベクトルにあたるというわけである（関数を考えるときは普通，連続性とか，積分についてよい性質を持つとかいった条件を考えるのだが，それは今は大した問題ではない）．関数というものはかなり昔から考えられてきたが，このように「関数＝無限次元ベクトル」という考え方が出てきたのは比較的新しく，20 世紀前半のことである．微分方程式（あるいはそれを書き換えた積分方程式）を考える際に，一つ一つの関数ではなく，関数全体の集合を考えることの有効性が，その頃初めて明らかになってきたからである．高校で最初に習うときは，ベクトルと関数は全く別のもののようだが，両者には共通の性質がたくさんあるのである．このようにして，線形代数の無限次元版の理論が登場した．関数解析学と呼ばれ，現在でも様々な方向に発展している．

無限次元の研究が盛んになったもう一つの理由は，物理学，特に量子力学の研究である．量子力学が 20 世紀前半に成立し，その数学的理解が当初から大きな問題になった．そこで，物理的な「状態」を数学的に考えるには，無限次元のヒルベル