March 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 561

特集／物理数学の効用

巻頭言

佐々木　隆

物理数学とは名の通り，物理（自然）現象の解明のために作り上げられてきた数学的方法の総称であり，19 世紀までの数学の大部分を含み，現代数学の重要部分を構成している．従って，その理論の根元には，必ず豊富な具体例が存在する．それらの具体例を丹念に調べ学ぶことにより，そこから発展した抽象的数学概念や方法を，公理論的・演繹的な道筋よりも速やかにかつ深く理解できるだろうというのが今回の特集の趣旨である．変分法，ベクトル解析などから可積分系までの 10 の話題の具体例が丁寧に扱われている．じっくり読んで，根元の現象と発展としての種々の概念・方法との関係を理解していただきたい．

初学者はややもすると数学理論の華麗な構造に目を奪われがちであるが，その底にある具体例を常にしっかり把握することを勧めたい．「良い具体例のない抽象理論に惑わされるな！」というのが適切な助言だろう．数学の研究会に出席すると，講演の途中に『General Nonsense だ！』というヤジが入り，弁解と攻撃の応酬が続くことがある．一般化と壮大化が数学者の持つ典型的な性向であり，根本を見失ってしまうと，General Nonsense に陥ってしまう危険性を常に持っているのだろう．

良い数学の大部分は，具体的な問題を解決するという欲求から生まれたものであることを銘記しよう．そのための武器（方法）が泥臭いものであってもためらうことはない．良い例として，オイラー方程式を取り上げよう．変分法の教科書に載っているのはラグランジュによって完成した導出法 (1760) である．オイラーは，関数 $y=f(x)$ を含む積分

$$J=\int_a^b F(x,y,y')dx,\quad y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta$$

が停留値を持つための必要条件を次のように導いた (1744)．区間 $[a,b]$ を等間隔の小部分，$x_0=a,x_1,\dots,x_{n+1}=b$ に分けて，曲線 $y=f(x)$ を折れ線 $y_s=f(x_s)$, $y'_s=(y_{s+1}-y_s)/(x_{s+1}-x_s)$ で近似して，上の積分を有限和

$$S'=\sum_{s=0}^{n}F(x_s,y_{s+1},y'_s)\Delta x,\ \Delta x=x_{s+1}-x_s$$

におきかえた．これは y_s だけの関数なので，その偏微分がすべて零になることが必要である：

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]_{x=x_s}=0,\quad (s=0,1,\dots,n+1).$$

極限 $\Delta x\to 0$ を取って，オイラー方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0,\quad a\le x\le b.$$

を得る．

最後に元気づけられる一言．研究所の一隅にアインシュタインのポスターが掛かっている．そこにある言葉："Do not worry about your difficulties in mathematics; I can assure you that mine are still greater." 自然現象に根ざしていれば，それ故に泥臭くとも，純粋思惟の産物よりも偉大なものができることがあるという宣言であろう．

（ささき・りゅう，京都大学基礎物理学研究所）