

特集／曲面の不思議

曲面は現代幾何学のふるさと

森田 茂之

1. ガウスの曲面論

よく知られているように、幾何学の歴史は古い。2000年以上前のギリシャ時代に、すでにユークリッド幾何学が誕生している。しかし、現代幾何学の源泉は時代をずっと下って19世紀のガウス曲面論(1827)にあるとあってよいだろう。ガウス(Gauss, 1777-1855)は、時に数学王とも呼ばれるように、数学のほとんどすべての分野で著しい業績を挙げた。幾何学における業績は、ガウスの仕事全体の中では、分量的には少ないと言える。しかし、ガウス曲率、ガウス写像、ガウスの驚愕定理等、そこで導入された新しい概念と結果は、その後の幾何学の発展に決定的な影響を与えた。ガウス曲率は曲面の各点における曲がり具合を、実数によって眼に見える形で表したものであり、今では常識ではあるが当時としてはまさに画期的な考え方である。ガウス写像は、千変万化の曲面の曲がり具合を計る物指として、単位球面が有効に使えることを示した。単位球面は、少し後に現れた今にいうグラスマン多様体の特別な場合と言うことができるが、その後20世紀になってトポロジーと呼ばれる分野で展開された分類空間という重要な概念の先駆けである。また、ガウス曲率が曲面がおかれている空間から自立した曲面自身の言葉

で記述されることを示した驚愕定理の発見は、曲面の幾何学が、ユークリッド空間からいわば“親離れ”した瞬間であると言えよう。

曲面論に続いて、有名なガウス・ボンネの定理

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S)$$

が登場する。任意の曲がり具合をした向き付けられた閉曲面 S のガウス曲率 K の総和と、オイラー数 $\chi(S)$ との密接な関係を示す美しい等式である。

同じ19世紀前半には、ガウス、ボヤイ、ロバチェフスキーによって、それぞれ独立に(双曲的な)非ユークリッド幾何学が創始されている。有名なユークリッド幾何学の第5公準を否定した幾何学の誕生である。これもまた、2000年余という長い時間をかけてようやく近代幾何学が幕開けを迎えたことを示す成果であった。

2. リーマン、ポアンカレの新しい考え

ガウスの曲面に関する理論に続いて、現代幾何学へ至る道筋を確かなものにしたのはリーマン(Riemann, 1826-1866)の仕事である。リーマンは、リーマン予想によってとくに有名であるが、その比較的短い一生においていくつもの深い天才的な