November 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 569

特集／連続から離散へ

はじめに

薩 摩 順 吉

世界は連続か離散か．本特集はそうした根元的とも言える問いかけに答えようとするものではない．世の中の現象を解析するのに連続的な見方が良いのか，それとも離散的な見方が良いのかについて考える材料を提供しようというものである．

これまで何百年にわたって連続的な見方，すなわち微分方程式を用いて現象を解析するのが研究の主流であった．ニュートンは，運動法則のうち運動方程式を微分方程式で表し，その解を求めるという手法を提案した．微分方程式に初期条件を与えて積分するという手段が自然科学における一つの決定的な方法になったのである．近代解析学，近代物理学ともにニュートンに始まるといってよいほど，歴史的に重要な一歩であった．

物理学においては，力学，連続体，電磁気と対象は拡がっても研究手段は微積分であった．20 世紀になって登場した相対性理論も時空は連続であるという仮定の下に展開されてきた．量子力学は連続的な手法と離散的な手法がともに用いられた研究対象であるが，やはり連続的な取扱いが中心であったと言えよう．

ところで，ニュートンが運動の理論を展開するために導入した極限の考えは必須のものであっただろうか．すなわち，変位の時間変化である平均速度，平均速度の時間変化である平均加速度に対して時間間隔 $\to 0$ の極限として得られる瞬間速度，瞬間加速度は本当に必要なものであっただろうか．

決してそうではない．平均速度，平均加速度を考えても理論は展開できる．その場合，運動方程式は微分方程式でなく，差分方程式で書かれることになる．その方程式の解は，原理的に，求めることが可能である．得られた解で時間間隔 $\to 0$ の極限をとると，当然のことながら対応する微分方程式の解に一致する．しかし，問題は差分方程式の解を求めるのが極めて面倒であるということである．

現象をよく記述し，できるだけ広いクラスの解を得るためには，差分方程式，すなわち離散系が最も優れていると，筆者は主張したい．微分方程式，すなわち連続系はあくまで差分方程式の近似であり，解のいくつかを失う可能性がある．それでは，なぜ離散系を直接扱わないのか．すぐ上で述べたように，計算は極めて面倒であり，かつ見通しが悪いものになるからである．そのため，ニュートンが導入した微分方程式が，ずっと研究対象の中心に位置していたのである．

コンピュータの実用化は，こうした状況に大きな変化をもたらした．人力が及ばない大規模な計算が簡単に行えるようになったのである．そこで発見されたのがカオス，フラクタル，ソリトンといった数理物理学上の重要な概念である．すべて