

特集／数論の探求

ゼータへの旅

黒川 信重

本特集は数千年の歴史を持つ数論の現在の様子を伝えることを目的にしている。そうは言っても、数論は幅が広い。ピタゴラスが言った通り『万物は数』であるのだから際限はない。ここでは、ゼータ関数に関連することにテーマを絞ってある。それでも、ゼータも広い。あらゆるところにゼータは遍在している。実際、今回の特集のラインナップから見られるように、数論はゼータを通して、古典的な数論の範囲だけではなく、多様な分野と連携している。それは、保型形式であったり、代数多様体であったり、リーマン多様体であったり、あるいは、物理学であったりする。しかも、複数のテーマと同時に結びついている。それが現在の数論の実態である。

特集の記事の概観を、読み方指南も兼ねて、ざっと紹介しよう。

- 最初に黒川の記事「多角数からゼータへ：紀元前から現代まで」によって、ピタゴラスの時代からゼータへの橋を渡ってほしい。今から2500年前のイタリア南岸のクロトンにあったピタゴラス学校・研究所で考えられていた多角数を、現代的なゼータから見てみよう。
- 現代数論の基本となるゼータ関数と素数分布との関連に関しては平野氏の記事「素数定理：ゼータとリーマン予想」を読みたい。素数分布という一見すると簡単そうな問題が、ゼータを通

して、150年間未解決の数学最大の難問リーマン予想に結びつく様子を見てほしい。

- 保型形式とゼータ関数との関連については、保型形式に対応するゼータ関数だけでなく、セルバーグゼータ関数の零点の固有値解釈（ヒルベルト・ポリヤ予想）まで解説されている権氏の記事「保型形式とゼータ」を読みたい。ヒルベルトモジュラー群のセルバーグゼータ関数という最新の話も含まれている。
- 代数多様体のゼータ関数の研究に関しては、高木貞治の類体論（代数体の類体論）の類似・拡張である代数多様体の類体論およびコホモロジーを用いた高次化からの研究の進展とゼータ関数の特殊値表示について、斎藤氏の記事「有限体上の Hasse-Weil ゼータ関数の特殊値」を読みたい。もともと、高木貞治が1920年に類体論を証明したときにゼータ関数が大活躍したことも覚えておきたい。
- 数論の含蓄の深い書物を解説した高瀬氏のコラム「名著をめぐる」で、高木貞治の名著を含め、古今の必読書に出会ってほしい。それは必ずしも狭い意味の「数論」あるいは「数学」内に留まっていないのであるが、それも『万物は数』だから当然かも知れない。

後回しになってしまったが、残りの項目にやや詳しく触れよう。保型形式のゼータ関数と代数多