November 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 581

特集／線形から非線形へ

巻頭言

吉川 研一

本特集号では，非線形のキーワードの下，“何が未開拓の学問領域として残されている”のか，あるいは，“これら取り組むべき課題としてどのような問題があるのか”，といったことを考えてみたいと思います．

問題意識を明確にするためにまずは，振り子時計を取り上げて考えてみましょう（保存系）．振り子の運動方程式は，$d^2\theta/dt^2 = -\sin\theta$ です．振り子の振り幅が小さいときには，$\sin\theta \to \theta$ と線形化することができ，そのことから等時性がでてきます．振り子の振幅が大きくなると，$\sin\theta \to \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots$ から予想されるように，等時性は崩れ，周期が次第に増大します．これは弱い非線形効果といえます．さらに振幅が大きくしていく，すなわち振り子のエネルギーを増大させていくと，θ は $180°$ を越えて変化するようになります．このとき，往復運動をしていた振り子は，体操競技の大車輪のような回転運動に状態が飛び移ります（分岐現象）．回転運動には，エネルギーが等しい，右回りと左回りの 2 種類の状態が現れます（双安定）．このように，弱い非線形性からさらに進んだときに，質的な変化を生み出すような非線形現象，これが本号の主題であります．

次に，生物の有性生殖を考えてみましょう．個体の数を n とすると，雄と雌の恋が成立して子供のできる確率は一般に，n^2 で表され，死亡の確率は n に比例することから，次の非線形の微分方程式が出てきます．(a, b は正の定数)

$$\frac{dn}{dt} = an^2 - bn.$$

これは，$n = b/a$ に不安定固定点を持ちます．すなわち，個体数がある閾値を下回ると，その生物種は絶滅に向かわざるを得なくなることを意味しています．このように，生物種の数の変動の基本原理を数理的に理解しておくことは，地球環境の下での生物多様性を維持する方策を考える上では，必須といってもいいでしょう．さらに，上記の非線形常微分方程式の n を中性子に置き換えると，原子炉での臨界現象のメカニズムにつながることになります．

ここで最近見つかった面白い非線形現象を紹介しましょう．油（絶縁体）の中に，ミクロ水滴を作り，直流の電圧を印加してみます（図 1）．すると，ある電圧以上になると，滑らかな回転運動が生じます．ここでは，一定の電圧の下，実空間上に limit cycle が生じていることに注目してください．図のような実験系では，電極間の距離が $100\,\mu$m 程度，電圧は数十 V に設定したときにこのような定常的な運動が起こります．意外なことに，昨年に発見されるまでは，このような直流電場での回転運動といった現象は知られていませんでした．大学の物理学では，古典力学は空間スケールが小