

特集／物理と数学における厳密解

徒然なるまま厳密解

国場 敦夫

厳密解と聞くと、厳しい世界だなあと感じてちょっと後ずさりしたくなるだろうか、それともワクワクするだろうか。筆者はその両方である。そもそも「厳密」という言葉がいかめしい。数学で「解」と言えばほぼ自動的に厳密解なのであって、本来わざわざ「厳密」をつける必要はない。この言葉はあまたの近似解、手法が試される物理で生まれたに違いない、そう割り切って単に「解」で良いのではないかという、これもあっさりし過ぎの感がある。「厳密解」と呼ぶとき、それは単に近似と峻別するためだけでなく、その見事さ、初めて達成した先人に対する敬意、波及した歴史的意義などに思いをはせる気持ちが働くためだろうか。

ともあれ、そのような厳密解は物理のほぼすべての分野に存在し、珠玉の名画のように鑑賞する人を魅了する。本特集号では、古くから知られ教科書にも記載されるものから現在進行中の研究対象まで、典型的な例を集めてみた。分野と時代を超えて、先人の炯眼と研究の最前線を楽しんでいただければ幸いである。ここでは厳密解というテーマについて、つれづれなるまま心に移り行くよしなしごとを、そこはかたなく書きつくとしよう。

まずは、一口に厳密解と言ってもその意味するところは実に多彩であることだ。一番代表的なのは「... 方程式」の厳密解というものだが、「... 模型」や「... 理論」の厳密解というものもある。こ

れは計算すべき物理量、例えば分配関数や相関関数などが「求まった」という状況である。ところがこの「求まった」とはどのようなことなのか、数学的な定義は存在しない。「解析的に」とか「閉じた形で」などと大らかに表現されることもあるが、本当に「求まった」と思うかはそれに関わる人々が如何に非自明で有用な結果であると考えてるかに依っている。極端な話、例えば分配関数を $Z = \sum e^{-\beta E}$ と書き、この式は何処にも近似はなく閉じている、と言って厳密解と呼ぶ人はいない。しかしこの状態和を何処までどのように還元できたら厳密解と呼ぶべきかとなると、その基準は定まっているわけではなく、色々な考え方があり得る。このような問いは、価値観や審美観に訴え始めると不毛な議論に陥るが、一方で計算量・タスクの評価による定量的考察を試みることは一興である。

「... 模型」の厳密解という場合、もう一つ留意すべきは、分配関数は求まっても相関関数は求まっていない、あるいは基底状態は求まっても励起状態はそうはいかない、などといった事情があることだ。「... 方程式」の厳密解も、一般解のことかもしれない特殊解の場合もある。筆者の研究分野(可積分系)では、「模型は未だ構成されていないが解は知られている」といったことまで起こる。

exact solution は rigorous かという問いもある。これを和訳すると「厳密解は厳密か」となっ