October 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 604

特集／分類する《数理科学》

分類分けという発想

河東 泰之

科学者はしばしば分類することが好きである．近代科学は分類することから始まったと言ってもよいようなものだ．もちろん数学者も分類が好きな人が少なくない．そもそも，数学，物理，化学，…なども近代になって分類されてできたものである（もともとは哲学も一緒であった）．そして数学の中でも，代数，幾何，解析といった分野に分類され，それぞれの中でも細かく○○理論のように分かれていく．本来数学（と理論物理の数学的な部分）は一体のものであり，人工的に分類してもかえって不自然になることも少なくないが，様々な都合によって分類されてしまうことが多い．私の専門の作用素環論も通常は解析に分類されており，実際に講義で教えるような内容とのつながりで言えば，ルベーグ積分，フーリエ変換，関数解析といったものから自然に続いている．私も講義を担当するときはこういった科目を教えることが多いが，実際の研究では，有限群論も代数幾何学も3次元トポロジーも表現論も確率論もみな関係しており，「解析学」の枠に閉じ込めてしまうことにはあまり意味がなく，かえって有害でさえある．

またその数学の○○理論の中でも分類理論が大きな地位を占めていることが少なくない．こちらは数学的な動機に基づいているので分類しようとするのは何ら不自然なことではない．よくあるのは，ある数学的な対象（例えばリー群）について，○○型などと名付けていくつかのクラスに分ける，あるいは「○○の性質をもつもの」と言って特定のクラスを取り出して研究するというものである．さらに順番に名づけて，I型，II型，…と分けていくこともよくある．これらはある程度粗い分類であることが普通で，例えばII型の○○はとてもたくさんあって，さらにその中でまた分類したりするわけである．

もっと望ましいとされているのは，何らかの数学的対象（例えば多様体）に対して，何かもっと簡単な量（例えばアーベル群）を対応させてそれによって，（ある自然な基準で）分類できる，といった理論である．このように対応させる量を不変量と言うが，それによって完全な分類が可能であるとき，完全不変量と言い，しばしば高く評価される．つまりある数学的対象が「同じ」であるかどうかを判定するには完全不変量を計算してそれが「同じ」であるかどうかで決めればよい，という場合である．対象となる範囲が広いほど，また不変量が簡単であるほど高く評価されることが多い．

しかし完全不変量であっても，あまりに計算しにくかったり，不変量自体が複雑で同じかどうかの判定が難しかったりすると，分類定理とはあまり言いにくくなってくる．例えば私の専門の作用素環論で言えば，可換 C^* 環は，そのスペクトルと呼ばれる完全不変量（コンパクト・ハウスドルフ空間）によって分類されるが，コンパクト・ハウスドルフ空間が同じ（同相）であるかどうかを