

特集／数理科学における代数的構造

代数学からのアプローチ

桂 利 行

20 世紀のフランスにおいて、構造主義を掲げて数学の基礎の再編を図った数学者集団がある。ブルバキである。アンリ・カルタン、クロード・シュヴァレー、ジャン・デルサルト、ジャン・デュドネ、アンドレ・ヴェイユという錚々たるメンバーによって始められたこの活動は、ジャン・ピエール・セール、ピエール・カルチエなどの世界トップレベルの数学者と世代交代を重ねつつ、20 世紀の数学に大きな影響を与えた。彼らは、代数構造、順序構造、位相構造という 3 つの大きな型を設定し、それに基づいて約 7000 ページにもおよぶ「数学原論」を著し数学の体系化を図ったり、その根幹には、数学を純化すれば代数になるという考え方がるように思われる。実際、どのような数学にもどこかに代数的な構造が存在すると言っても過言ではなく、また、代数的構造は数学の理論を体系化するのに大変都合がよい。A.F. モンナもその著書『現代数学発展史』²⁾において、古典数学から現代数学への発展の過程で数学の代数化が果たした役割の重要性について述べている。現在では、ブルバキ的な考え方に対する批判も多く、解析や幾何においては代数では扱いきれない部分が多々あることも事実であるが、代数化できる部分には構造的な数学美が秘められている。

それでは、自然界や社会に存在する数理科学には、どのくらい代数的な構造があるだろうか。代

数とは基本的には演算の数学であり、整数や多項式と関係した概念がその根底に存在する。このように基本的なものであるがゆえに、数学的に把握できるところには何らかの意味で代数構造が存在するし、対称性が存在するところには面白い代数構造が潜んでいる。また、アルゴリズムという用語は、algebra (代数) という言葉の語源となったアラビア語 Al-jabr (移項) という用語を著書に用いたアル・フワーリズミーの名前から生まれたが、代数はアルゴリズムを作るのに都合がよい分野でもある。アルゴリズムを見出すことは、ルーティーン化をすることに他ならない。これは、人間の思考を簡略化するだけではなく、コンピュータとも相性が良い。代数化は異なる分野間の類似を見出すという効果もある。本特集号では、数理科学における代数構造に着目し、素粒子物理学、情報科学における暗号理論・学習理論・コンピュータ理論、生命科学や結晶構造の化学など、現在展開されている研究から代数構造が効果的に使われているものを選んでご紹介する。

素粒子論においては、古典的な運動方程式の範囲ではもはや理論は組み立てられず、量子力学が必要になる。ヒルベルト空間とその上の自己共役作用素という量子力学の設定は代数が有効に働く環境である。物理系の状態にはヒルベルト空間の状態ベクトルが、物理量には自己共役作用素が対