

特集／圏代数をめぐって

圏代数とは何か

中西 知樹

本特集の主題である圏代数 (cluster algebra) とは, Fomin と Zelevinsky が 2000 年頃に導入したある種の可換代数のクラスである。圏代数には圏変数と呼ばれるある特別な生成元が存在し, それらが「変異 (mutation)」と呼ばれる関係式 (あるいは漸化式) で互いに結びついている, という際立った特徴がある。このような概念は Lie 理論においてさまざまな文脈で現れる代数的・組合せ論的構造 (例えば, Grassmannian の Plücker 座標や Lie 群の座標環における関係式) を, 「Laurent 性」という共通の性質に着目して統合化・一般化したものであり, これにより Lie 群や量子群における組合せ論的構造や現象のより包括的な理解を得ようというのが圏代数の導入のもともとの動機であったものと思われる。

圏代数に最初に注目したのは多元環の表現論の研究者たちであった。彼らは圏代数における変異と, 多元環の Auslander-Reiten 理論に現れる変異との顕著な類似性に注目し, その結果, Buan, Marsh, Reineke, Reiten, Todorov たちは, ADE 型と呼ばれる圏代数に対して多元環の表現による圏化を与えるに至った。これは 2004 年頃のことである。これを契機に, その後多元環の表現論と圏代数は互いに関連しながら飛躍的な進展を遂げ, 現在でも蜜月の関係が続いている。

一方, やはり 00 年代前半に, Gekhtman, Shapiro,

Vainshtein たちは離散力学系の Poisson 構造の立場から, また, Fock と Goncharov は Teichmüller 理論の立場から, それぞれ Fomin と Zelevinsky の仕事の影響を受けつつも, 本質的には独立に圏代数の変異の概念に到達したことは意義深い。

ところで, 日本においては, 少なくとも 00 年代の終わり頃までは (多元環論の一部の研究者を除いては) このような潮流の影響をほとんど受けなかったように思われる。例えば, 私自身が圏代数を初めて認識したのは 2008 年 3 月に参加したバークレーの数理科学研究所 (MSRI) における Lie 理論の研究集会のことであった。そこでは, 「cluster algebra」をタイトルに含む講演が 5 つほどあり, 当初プログラムを見て「cluster algebra とは何ぞや」と思ったものであった。しかしながら, 研究集会冒頭の Fomin による基調講演を聞くや否や, それが私が 90 年代から研究を続けていた可積分系における T 系や Y 系といった代数関係式と本質的に同じものであることを認識した。そして, それをきっかけに, 現在まで圏代数とその応用の研究を続けるに至っている。

実は, このような圏代数の研究を始めるいきさつはどうやら私だけの特別なものではないようで, 2008 年 12 月にメキシコで私自身としては初めて圏代数をテーマにした研究集会に参加したとき, 当時すでに圏代数について多くの論文を書いていた