MATHEMATICAL SCIENCES
April 2015 Number 622

特集／代数学における様々な発想

代数の発想と進化

寺杣 友秀

1. 代数の起こり

数学の分野は大雑把にいって，代数，幾何，解析がある．しかし実際はこれらの分野が互いに交錯し合い，統合的に，あるいは独自の世界を形づくりながら発展している．「ここまでが代数」という境界ははっきりしていないものの，代数と呼ばれる分野の共通にある考え方は，数の体系に共通な四則演算などの構造を抽象化して，その計算方法を確立し，さらにもとに戻って応用するところにあるだろう．代数を意味するアルジェブラという言葉は，アラビアの数学者フワーリズミーの著書『ジェブルとムカーバラの算法の摘出』に語源をもち，数式の変形法と方程式を扱うものであった．中学生で学ぶ方程式は典型的な代数の問題である．未知数を x とおいて問題を x の方程式で表して，一般的に数について成り立つ計算法則を用いて x を求めるというものである．現代ではこういったものをさらに発展させ，統一的に扱うための枠組みと公理系が考えられている．代数の起源としてもう一つ見逃せないのは，エジプトのアレクサンドリアに住んでいたとされる，ディオファントスによる 13 巻に及ぶ著書『算術』であり，代数学の基礎を作ったとされている．方程式の整数解に関する問題も多く扱っており，フェルマーも彼の最終定理をこの本の余白に書き残したことは有名である．

2. 幾何との融合

幾何的対象を式で表して，その形式的変形により問題を系統的に扱う技法はデカルトの座標の導入に始まる．幾何の問題に代数が用いられるようになり，これは現在の代数幾何の出発点でもある．例えば円 C を考え，C の内部の中心ではない点 P をとる．P を通る直径でない直線 L は円と 2 点 Q_1, Q_2 で交わるが，そこでの円の接線の交点 R を考える．P を通る L を動かしたとき，R の軌跡は直線を動くことは，双対性として語られる有名な事実であるが，代数的には次のように示される．まず円 C が $x^2+y^2=1$ で表される座標をとり，P, Q_1, Q_2 の座標を $(p_0,q_0),(p_1,q_1),(p_2,q_2)$ として，直線 L の方程式を $ax+by=1$ とする．P, Q_1, Q_2 は直線 L 上にあるので，$ap_0+bq_0=ap_1+bq_1=ap_2+bq_2=1$ が成り立っている．また Q_1, Q_2 における円 C の接線はそれぞれ $p_1x+q_1y=1$, $p_2x+q_2y=1$ と表されるのでその交点 R の座標は (a,b) となる．ところが (a,b) は上の式から $p_0x+q_0y=1$ で定義される直線上にあることがわかる．このように幾何と代数を互いに関連づけることにより見通し