特集／自然界を支配する偶然の構造

数理科学への確率論によるアプローチ

熊 谷　隆

今月号の特集のテーマは,「自然界を支配する偶然の構造」である．自然界の多くの現象には，様々な形でゆらぎ，ランダムネスが入っている．このようなランダム性は，確率論の言語によって定式化され，数学もしくはもっと広く数理科学の研究対象となる．従って，確率論が役に立つ対象は必然的に極めて広いものとなる．

確率論の研究の醍醐味の一つは，ランダム性を通じて現象を直感的に理解することができる点であろう．例えば熱方程式などの微分方程式は，確率論の観点からはランダムな粒子の動きの平均量が表す方程式として理解でき，これにより方程式を，粒子の動きというより直感的な形で捉えることができるのである．そのため,「ランダムなパスをどのように定式化し，解析するか？」という問いが，確率論の研究において根幹をなす問題意識となる．ランダムなパスの典型例である，ブラウン運動と呼ばれるランダムな粒子の動きは，独立な増分を持ちその増分がガウス分布に従うような連続なパスとして，数学的に定式化できる．このブラウン運動は，ほとんど至る所で微分ができない（実際，任意の ε について $(1/2-\varepsilon)$ 次のヘルダー連続性は持つが，1/2 次のヘルダー連続性は持たない）ため，スティルチェス積分はできない．1942 年に伊藤清氏は，ブラウン運動のサンプルパスの増分の二乗和の極限がランダムでない有限量となることに着目し，この性質を生かして確率積分とその変換公式である伊藤の公式を導出し，確率微分方程式を創始した．この理論は，平たく言えばブラウン運動の微積分の基礎を与えるものであり，ランダムな現象の解析にパラダイムシフトを与えた．伊藤理論はさらに,（局所）マルチンゲールの範疇に美しく拡張され，確率解析として統計力学や量子力学から数理ファイナンスまで非常に広範囲な分野に用いられることとなった．無限次元空間の解析としての確率解析は，確率変分の考え方を用いてウィナー空間上での微積分を展開する，所謂マリアヴァン解析の登場により，80 年代から 90 年代にかけて円熟期を迎えた．

今世紀になって，確率論はさらに目を見張る発展を続けているが，ここでも「ランダムなパスの解析」が大きなキーワードになっている．その一つは，シュラム–レヴナー発展（Schramm–Loewner evolution）である．シュラム氏は，自己回避ウォークや，臨界サイトパーコレーション・臨界イジング模型の相分離曲線といった統計力学に自然に現れる離散曲線のスケール極限で決まるランダムな曲線が，1 次元ブラウン運動の分散を 1 パラメーターとする確率微分方程式の族として表されることを見抜き，これらの族を stochastic Loewner evolution と名付けた．略して SLE と呼ばれるこの方程式のことを，後に人々はシュラム–レヴナー発展と呼ぶようになり，離散モデルのスケール極限であることを厳密に証明し SLE を解析することにより，2006 年にヴェルナー氏が，2010 年にスミルノフ氏がフィールズ賞を受賞し，今世紀の確率