August 2016 MATHEMATICAL SCIENCES Number 638

特集／線形代数の探究

線形代数の姿

桂 利行

線形代数は，微分積分学とともに，大学初年次における数学教育の基礎となっている．線形代数は数学理論のいたるところで使用され，線形代数が現れない数理科学の理論はないと言っても過言ではない．線形代数の理論において主役をなすのは，ベクトルと行列，行列式であり，その起源は連立1次方程式にある．約4000年前，古代バビロニア人はすでに2つの変数の連立1次方程式の解法にあたる概念を知っていたようである．その意味では，線形代数の起源は大変古い．しかし，連立1次方程式の理論を近代的なものにしたのはライプニッツ（G.W. Leibniz）であり，17世紀のことである．彼は行列式の概念を導入した．日本においても，ほぼ同じ頃，関孝和が和算において行列式の概念を得ている．現代においては行列がまず定義され，それから行列式が導入されることが一般的であるが，歴史的には行列式の方が先に認識されていた．行列の概念が明確なものとなり，行列（matrix）という言葉を導入したのはシルヴェスター（J.J. Sylvester）である．19世紀半ばのことであった．実際，19世紀になって，行列のさまざまな概念が整備されていく．この頃になって，線形代数の教科書に名前が出てくる研究者が次々に登場する．ケイリー（A. Cayley）は『行列論』を著し，行列の理論の基礎を整理した．n 次正方行列 A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ に対し $\varphi_A(A)$ が零行列になるというハミルトン・ケイリーの定理は有名である．グラスマン（H.G. Grassmann）は高次元のベクトル空間を扱い，外積代数やグラスマン多様体を導入した．ジョルダン（M.E.C. Jordan）はジョルダン標準形で有名であるが，やはり19世紀後半から20世紀初めに活躍した研究者である．ジョルダン標準形についてはワイエルシュトラス（K.T.W. Weierstrass）もジョルダンとは独立に考案している．線形代数の基本となるベクトル空間を公理化したのはペアノ（G. Peano）であり，1888年のことであった．現在では定着している線形代数という言葉が現代の意味で使われ始めたのは，1930年に出版されたファン・デル・ヴェルデン（B.L. van der Waerden）の著書『現代代数学』の中である．これだけ基本的な分野の名称がこんなに新しいというのは驚きである．この辺りの歴史については，クライナー（I. Kleiner）著『A History of Abstract Algebra』（『抽象代数学の歴史』，斎藤正彦訳，日本評論社）に詳しい．

ここで，線形代数の本質的な風景を，正確な定義などは他の論説に任せることにして，概観しておこう．登場人物として，体 k と k 上のベクトル空間（線形空間ともいう）V がまず必要である．体 k は四則演算ができる代数系であり，有理数体 $\mathbf{Q}$，実数体 $\mathbf{R}$，複素数体 $\mathbf{C}$ などが該当する．体 k の元はスカラーと呼ばれる．以下，簡単のため，