December 2016 MATHEMATICAL SCIENCES Number 642

特集／高次元世界の数学

高次元世界の数学

河東 泰之

高校数学では1変数の微分積分学を習うのに対し，大学数学では2変数以上の微分積分学を習う．2変数以上あると2次元以上の空間を考えるため，1次元に比べると高次元ということになる．また線形代数では 1×1 行列は単に数のことなので，行列として新たな意味があるのは 2×2 行列以上の場合である．これも1次元の世界に比べると2次元以上は高次元ということになる．このように次元が高い世界を扱う数学を取り上げたのが今月号の特集である．

しかし何次元，何変数以上が高次元なのかは微妙な問題である．微分積分学でいうと，2変数以上になれば偏微分や重積分が出てくるので確かに1変数とは違うが，2変数関数のグラフは目に見えるし，極値問題なども手で計算できる．それに対し100次元空間の重積分と言われると，近似計算でも簡単には手が出ない．線形代数では，少し昔は高校で 2×2 行列までを教えていたし，固有値計算などを手でできるのはだいたい 3×3 行列くらいまでである．一方工学的な応用では 1000×1000 行列といったものも簡単に出てくる．こういったサイズになると，大学1年生で習うような一般論ではなかなか実際の計算には手が出ない．普通の微分積分学の次に習う複素関数論では，最初に扱うのが1変数の理論で，そこでは直感的にもわかりやすい精密な理論が成立しているのに対し，2変数以上になると大幅に難しくなる．しかしその後，3変数，4変数，と増えていってもあまり一般理論には変わりはないようである．また代数幾何学では3次元以上を高次元というようだが，位相幾何学では3次元や4次元は低次元といっている（もっとも位相幾何学では，低次元だから易しいということではなく，むしろ次元が上がったほうが話が簡単になることがあるのだが）．あるいはまた，有限次元ではどこまでも似たようなもので，無限次元になって初めて本質的に違う現象が起こるものもある．例えば関数解析学は無限次元特有の現象を扱う分野である．また物理現象の解析であれば，素朴に考えて我々の空間は空間3次元，時間1次元であるため，4変数までの微分方程式は考えやすい．一方10次元や11次元の空間を扱う超弦理論もあるし，また量子力学，さらには場の量子論では無限次元空間を扱わなくてはならない．そしてこういった無限次元空間の数理物理学が，3次元，4次元に特有の幾何学と結びついていることも，この30年くらいに明らかになった現代数学の重要なテーマである．

このように，次元が上がっていったとき，問題の難しさ，面白さがどのように変わっていくかは問題によって，分野によって異なる．本特集では幅広い分野のテーマを取り上げ，各執筆者の方々に，高次元になると，低次元とはどう違う話になるのかを解説していただいた．分野ごとに違った新たな展開を味わっていただきたいと思う．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）